

Número de aluno

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadrados respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome:

.....

Curso: Número de aluno:

O exame é composto por 6 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Nas questões 1–6 marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta, cada resposta certa vale 1,5 valores, cada resposta errada desconta 0,5 valores e marcações múltiplas anulam a questão. Se a soma das classificações das questões de escolha múltipla der um número negativo, será atribuído 0 valores à parte de escolha múltipla. As questões 7, 8 e 9 valem, respectivamente, 6, 3 e 2 valores.

Questão 1 Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Indique qual das afirmações seguintes é **VERDADEIRA**:

- ☐ a) As outras três opções são falsas.
- ☒ b) O sistema de equações $AX = 0$ é possível e indeterminado.
- ☐ c) $r(A) = 4$.
- ☐ d) A é uma matriz em forma de escada.

Questão 2 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, com $\det A = k > 0$. Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

- ☐ a) $\det A^3 = k^3$.
- ☒ b) Se $A \xrightarrow{l_3 + (-2)l_2} B \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_3} C$, então $\det C = k$.
- ☐ c) $\det AA^T = k^2$.
- ☐ d) $\begin{vmatrix} -a & -kb & -c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = -k^2$.

Questão 3 Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 2))$, $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$. Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida do modo seguinte: $f(x, y, z) = (x, x, z)$.

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

- ☐ a $\text{Im } f = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 3) \rangle$.
- ☒ b f não é um endomorfismo diagonalizável.
- ☐ c $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- ☐ d $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Questão 4 Para $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + (\alpha + 1)y + z = 1 \\ 2x + \alpha y + z = 1 \end{cases}.$$

Indique qual das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**:

- ☐ a As outras três opções são falsas.
- ☐ b Se $\alpha = -2$ o sistema é indeterminado.
- ☐ c Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, o sistema é impossível.
- ☒ d O sistema é possível determinado se, e só se, $\alpha \neq -2$.

Questão 5 Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z \wedge w = 0\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

- ☐ a $F + G = \langle (1, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle$.
- ☐ b $\langle (1, -1, 0, 0) \rangle \subseteq F$.
- ☒ c $((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui uma base de $F \cap G$.
- ☐ d $\dim(F + G) = 3$.

Questão 6 Considere as seguintes rectas: a recta $\mathcal{R}_1$ definida pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e a recta } \mathcal{R}_2 \text{ definida pelo seguinte sistema de equações } \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Indique qual das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**:

- ☐ a $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$.
- ☐ b As outras três opções são falsas.
- ☐ c $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são paralelas.
- ☒ d $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são enviesadas.