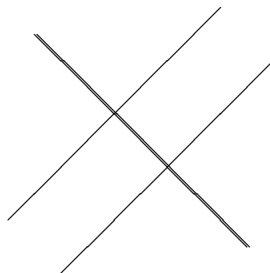


ÁLGEBRA LINEAR e GEOMETRIA ANALÍTICA

EXERCÍCIOS

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x + 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNL
(2009/10)

Índice

1	PRIMEIRA PARTE	1
1.1	SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES	1
1.2	OPERAÇÕES COM MATRIZES	6
1.3	SUBESPAÇOS VECTORIAIS DE $\mathbb{R}^n$	11
1.4	EXERCÍCIOS DE REVISÃO DA PRIMEIRA PARTE	14
2	SEGUNDA PARTE	19
2.1	DETERMINANTES	19
2.2	APLICAÇÕES LINEARES	24
2.3	EXERCÍCIOS DE REVISÃO DA SEGUNDA PARTE	26
3	TERCEIRA PARTE	31
3.1	BASES	31
3.2	DIAGONALIZAÇÃO	34
3.3	ESPAÇOS VECTORIAIS	37
3.4	EXERCÍCIOS DE REVISÃO DA TERCEIRA PARTE	39

Capítulo 1

PRIMEIRA PARTE

1.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

1. Quais das equações seguintes são equações lineares em x , y e z ?

- a) $x + \pi y + \sqrt[3]{2}z = e$.
- b) $x - y + 3z = \text{sen}\pi$.
- c) $x^2 + xy + z = 2$.
- d) $(\cos\frac{\pi}{2})x - (\text{sen}(3\pi))y + z = 0$.
- e) $\text{sen}(y) + 2z = -x$.
- f) $ax + 6y - 3z = 9$, com $a \in \mathbb{R}$.

Alguma das equações anteriores é equação homogênea? Em caso afirmativo, indique quais.

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 3x + 2z = 3 \\ 3x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

- a) Qual o número de variáveis do sistema?
- b) Quantas equações tem o sistema?
- c) O sistema é homogêneo?
- d) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ é solução do sistema?
- e) $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ é solução do sistema?
- f) $x = \frac{2}{3}$, $y = 1$, $z = 0$ é solução do sistema?

- g) Atendendo às soluções do sistema, classifique-o.
3. Um sistema de duas equações lineares, em três variáveis, pode representar que figuras geométricas do espaço $\mathbb{R}^3$?
4. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x + y = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Indique:

- a) a matriz ampliada do sistema.
- b) a matriz simples do sistema.
- c) a matriz das variáveis do sistema.
- d) a matriz dos termos independentes do sistema.
5. Considere a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- a) um sistema em que D seja a sua matriz ampliada.
- b) um sistema em que D seja a sua matriz simples.
- c) o pivot da terceira linha de D .
- c) o pivot da segunda linha de D .
6. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em forma de escada e quais são matrizes em forma de escada reduzida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Resolva os seguintes sistemas, pelo método de eliminação de Gauss-Jordan, apresentando para cada caso o conjunto-solução:

$$\text{a) } \begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 3 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -4x + 4y + 4z = 8 \\ 7x + y - 15z = -6 \\ -4x + 3y + z = 11. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y - 2z - w = 1 \\ 2x + y - z + 4w = -1 \\ -3x + 3z + 9w = -6. \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 7y + 5z + 3w + 2u = 0 \\ z - w + u = 2 \\ x + 7y + 8w - 3u = 5 \\ 2x + 10z + 6w = 3. \end{cases}$$

8. Resolva, geometricamente e analiticamente, os seguintes sistemas, nas incógnitas x_1, x_2 , sobre $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

9. a) Determine a, b e c valores reais, de forma a que os pontos $(x, y) = (0, 1)$, $(x, y) = (1, 3)$ e $(x, y) = (2, 1)$ verifiquem a relação

$$y = a + b \cdot 2^x + c \cdot 2^{2x},$$

estabelecida entre duas grandezas x e y .

- b) Justifique que se a relação anterior é verificada pelos pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$, então a, b e c existem e são únicos.

10. Determine os valores da constante $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema seguinte, nas incógnitas x_1, x_2, x_3 , sobre $\mathbb{R}$, tenha soluções não nulas:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

11. Determine as características das seguintes matrizes.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & F &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 G &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} & H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & I &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

12. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + y + cz = 1 \\ x + by + z = 1 \\ cx + y + az = 1. \end{cases}$$

- a) Resolva o sistema para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.
- b) Para $a = b = c = 1$, determine a característica da matriz simples e da matriz ampliada do sistema.
- c) Para b qualquer, mostre que, quando $a = c$, o sistema nunca é determinado.
13. a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema seguinte seja possível:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = \alpha \\ 3x - y + 3z = 4 \\ 5x - 3y + 5z = 10. \end{cases}$$

b) Calcule a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

onde α é o valor determinado em a).

14. Sem resolver o sistema seguinte, nas variáveis reais x, y, z e w ,

$$\begin{cases} x + y - z + w = a \\ y + z - 2w = b \\ 2x + y + z = c \\ -x + 2y - w = d \end{cases}$$

prove que ele nunca pode ser determinado.

15. Sem efectuar cálculos, justifique quais dos seguintes sistemas têm mais do que uma solução:

a)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

16. Considere os seguintes sistemas de equações lineares, nas variáveis reais x, y e z :

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + (b + 1)z = 3 \\ x + y + (a - 1)z = a - 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + ay + bz = b \\ x - y + z = 2 \\ x - ay + z = 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - by - az = -a \\ x - 2y + 2z = 3 \\ x - by + 2z = 2 \end{cases}.$$

Discuta os sistemas em função dos parâmetros reais a e b .

17. Para que valores reais a e b , as duas rectas do plano, de equações $-x + 5y = a$ e $4x - 20y = b$ são paralelas?

18. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas variáveis reais x, y, z e w :

$$\begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ x + y + z + (\alpha + 2)w = 0 \\ 2x + y + (\alpha + 2)z + (\alpha + 4)w = 0 \\ 4x + \beta y + 4z + 8w = \beta. \end{cases}$$

- a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β .
- b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto-solução do sistema.
19. No modelo de cores R, G, B, verifique se o vector de cor
- a) preto é combinação linear de G, B e azul celeste.
 - b) branco é combinação linear de R e azul celeste.
 - c) magenta é combinação linear de R, G e amarelo.
 - d) magenta é combinação linear de azul, branco e azul celeste.
 - e) magenta é combinação linear de R e B.

20. Sejam $u = (2, -1, 4, 5)$ e $v = (3, 0, 1, -2)$. Encontre escalares α e β tais que

$$\alpha u + \beta v = (4, 1, -2, -9).$$

21. Sejam $u = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $v = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares α e β tais que

$$\alpha u + \beta v + (8, -4, -2, 2, -6) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

22. Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ e $w = (2, 1, 5)$

a) $(7, -1, 13)$.

b) $(3, 3, 2)$.

c) $(0, 0, 0)$.

d) $(5, 1, 12)$.

23. Considere os vectores $v_1 = (1, 1, 0, 3)$, $v_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$. Quais destes vectores se escrevem como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 ?

a) $(3, 0, 7, 6)$.

b) $(2, 1, 2, 4)$.

c) $(0, 0, 0, 0)$.

d) $(-4, -4, 0, 12)$.

24. Considere os vectores $u = (2, 1, 2)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (0, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Quais destes vectores se escrevem como combinação linear de u, v, w ?

a) $(0, 0, 0)$.

b) $(3, 5, 2)$.

c) $(6, 9, 6)$.

1.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES

1. Resolva cada equação matricial em a, b, c e d :

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}.$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 11 & \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

- a) Qual o tamanho (tipo) da matriz A ?
- b) Quais os valores das entradas (posições) $(1, 2)$ e $(2, 1)$?
- c) Para que pares (i, j) se tem $a_{ij} = 1$?
- d) Indique qual é a 2ª coluna de A e qual é a sua 1ª linha.
3. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j \in \{1,2,3\}}$ definida por:
- a) $a_{ij} = i + j$
- b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -1, & i > j \\ 2, & i < j. \end{cases}$
4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.
 Calcule, quando possível:
- a) $A + 2B$
- b) $3B + D$
- c) $4D - 3C$
- d) $3A + 4A$
- e) $3(-A)$
- f) $2(3A)$
- g) $A + (2B + A)$.
5. Apresente cada um dos sistemas sob a forma matricial $AX = B$:
- a) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ 9x - y + z = -1. \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ x + 5y - 2z = -2. \end{cases}$
6. Determine a, b e c números reais: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ c \end{bmatrix}$.
7. Calcule, se possível, os produtos AB , quando:
- a) $A = [1 \ 2 \ 3]$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- b) $A = [3]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

8. Calcule, se possível, os produtos AB e BA , quando:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

9. Utilizando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $(AB)_{12}$, a primeira linha de AB e a terceira coluna de AB .

10. Para cada par de matrizes indicadas determine, se possível, as matrizes AB , $(AB)^T$, $B^T A^T$ e $A^T B^T$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine as matrizes simétricas e as matrizes hemi-simétricas.

12. Mostre que a única matriz de ordem n que é simétrica e anti-simétrica é a matriz nula.

13. Para cada par de matrizes indicadas determine, se possível, as matrizes A^2 , B^2 , AB e BA .

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$.

14. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Calcule, quando possível:

a) $AD + BD$

b) $BD + A$

c) $(A + B)D$

d) $D^T(A^T + B^T)$.

e) $(C^2)^T$

f) $(C^T)^2$

15. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

a) Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

b) Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

c) Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

$$(AB)^n = A^n B^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

16. Obtenha uma fórmula para A^n , $n \in \mathbb{N}$, onde A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$

17. Verifique se as matrizes apresentadas são elementares e em caso afirmativo determine a respectiva matriz inversa:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

18. Verifique se as matrizes seguintes são, ou não, invertíveis:

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

19. Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes, com $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

20. Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

21. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Determine matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_1 E_2 A = I$.
- b) Escreva A^{-1} como um produto de duas matrizes elementares.
- c) Escreva A como um produto de duas matrizes elementares.

22. Expresse A e A^{-1} como produto de matrizes elementares:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

23. Factorize a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

como $A = EFG R$, onde E, F e G são matrizes elementares e R é uma matriz em forma de escada.

24. Indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa:

- a) Toda a matriz invertível pode ser factorizada como um produto de matrizes elementares.
- b) Se A é uma matriz quadrada singular, então o sistema $AX = B$ tem infinitas soluções.
- c) Se A é uma matriz quadrada singular, então a sua forma de escada reduzida tem pelo menos uma linha nula.
- d) Se A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogêneo $AX = 0$ tem apenas a solução nula.

- e) Se A é uma matriz quadrada singular e se B é obtida de A por troca de duas linhas, então B também é singular.

25. Resolva os seguintes sistemas utilizando a inversa da matriz simples do sistema:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ y + 2z = 4 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ y - 3z = -1 \\ z = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 SUBESPAÇOS VECTORIAIS DE $\mathbb{R}^n$

1. Diga porque razão os seguintes conjuntos não são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$:

- a) $\{(1, a) : a \in \mathbb{R}\}$.
- b) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } ab \geq 0\}$.
- c) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \geq -b\}$.
- d) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \geq b - 2, a \leq b + 2\}$.

2. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

- a) $\{(0, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.
- b) $\{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}_0^+\}$.
- c) $\{(1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.
- d) o conjunto dos vectores da forma (a, b, c) com $c = a - 2b$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- e) $\{(a, b, c) : b + a = 1 \text{ e } a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

3. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

- a) $\{(0, a, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\}$.
- b) $\{(0, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}^+\}$.
- c) $\{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = a + d, c = 2a - b\}$.
- d) o conjunto dos vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a - 2b$, $d = b + a - c$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- e) $\{(a, b, c, d) : b + a = 1 \text{ e } a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

4. Escreva a forma geral dos vectores que pertencem ao subespaço $\langle (1, 0, -2), (1, 1, 1) \rangle$.

5. Sem fazer contas, determine se u é um vector do subespaço $\langle v \rangle$:

a) $u = (1, -1, -3), v = (-3, 3, 9)$.

b) $u = (1, 2, -3, 0), v = (2, 4, -6, 9)$.

6. Dê exemplo de um vector de $\mathbb{R}^4$ que não pertença ao subespaço $\langle (1, 1, 2, 4), (0, 2, 0, 4) \rangle$.

7. Encontre uma solução geral do sistema de equações lineares e obtenha um conjunto de vectores que gerem o conjunto-solução:

a)
$$\begin{cases} x+6y+2z-5w=0 \\ -x-6y-2z-3w=0 \\ 2x+12y+5z-18w=0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-2y+2z=0 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-y+2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$$

8. Encontre um conjunto de vectores geradores do subespaço

$$W = \{(a, 0, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Que figura geométrica é W ?

9. Encontre um conjunto de vectores geradores do subespaço

$$W = \{(a, b, 2a, 3b, -a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Que figura geométrica é W ?

10. Quais dos seguintes conjuntos de vectores gera $\mathbb{R}^3$?

a) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

b) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

c) $\{(1, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$.

d) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 1)\}$.

11. Determine que figura geométrica é representada pela equação:

a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(2, 1, 6, 8) + \lambda_2(0, 2, 3, 4)$.

b) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(0, -4, -6, -8) + \lambda_2(0, 2, 3, 4)$.

c) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1(0, 0, 0, 0) + \lambda_2(1, -2, 3, 4)$.

12. Determine se os vectores seguintes são linearmente independentes:

a) $v_1 = (1, 5, 7), v_2 = (3, -2, 4)$.

b) $v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (3, 0, -3)$.

- c) $v_1 = (0, 5, 1)$, $v_2 = (3, 0, 2)$, $v_3 = (-3, 10, 0)$.
d) $v_1 = (0, 5, 1)$, $v_2 = (3, 0, 2)$, $v_3 = (-3, 5, -2)$.
c) $v_1 = (9, -5, 4)$, $v_2 = (-3, 5, 3)$, $v_3 = (-3, 1, 1)$, $v_4 = (0, 0, 1)$.
13. a) Mostre que os vectores $v_1 = (1, 2, 2, 2)$, $v_2 = (0, 3, 1, 2)$ e $v_3 = (-1, 1, -1, 0)$ formam um conjunto linearmente dependente.
b) Escreva cada um dos vectores como combinação linear dos outros dois.
14. Encontre a tal que o conjunto formado pelos vectores $(2, 2, 1)$, $(2, 0, a)$ e $(0, 1, a)$ seja linearmente dependente.
15. Sejam u , v e w vectores de $\mathbb{R}^n$. Mostre que os vectores $u - v$, $v - w$ e $w - u$ formam um conjunto de vectores linearmente dependente.
16. Indique se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:
- a) Se três vectores, não nulos, de $\mathbb{R}^n$, formam um conjunto linearmente dependente, então cada vector do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.
b) O conjunto de todas as combinações lineares de dois vectores v e u de $\mathbb{R}^n$ é um plano.
c) Se u não se pode escrever como combinação linear de v e w , então os três vectores são linearmente independentes.
d) Um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contém o vector nulo é linearmente dependente.
e) Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então, para qualquer escalar não nulo k , o conjunto $\{ku, kv, kw\}$ também é linearmente independente.
17. Encontre uma solução geral do sistema de equações lineares e a partir dela, encontre uma solução geral do sistema homogéneo associado e uma solução particular do sistema inicial:
- a)
$$\begin{cases} 3x+4y+z+2w=3 \\ 6x+8y+2z+5w=7 \\ 9x+12y+3z+10w=13 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ -2x-2y+2z=-8 \\ -x-y+z=-4 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x-y+2z=-3 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$$

18. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=2 \\ 6x+4y-2z=4 \\ -3x-2y+z=-2 \end{cases}$$

- a) Encontre uma solução geral do sistema homogêneo que lhe está associado.
- b) Verifique que $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ é uma solução do sistema não homogêneo.
- c) Use os resultados de a) e b) para encontrar uma solução geral do sistema não homogêneo.

1.4 EXERCÍCIOS DE REVISÃO DA PRIMEIRA PARTE

1. A matriz simples do sistema de equações lineares $\begin{cases} x + z + 2w = 3 \\ y - z - w = 2 \\ x + y + w = 5 \end{cases}$, nas variáveis

x, y, z, w é:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) nenhuma das matrizes anteriores.

2. O conjunto-solução do sistema anterior é:

- (a) $\{(3, 2, 0, 0)\}$.
- (b) $\{(3, 2, 0, 0), (-1, 0, 0, 2)\}$.
- (c) $\{(3 + z + 2w, 2 - z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$.
- (d) $\{(3 - z - 2w, 2 + z + w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Uma matriz em forma de escada reduzida obtida de A é:

(a) a própria matriz A .

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$(c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) nenhuma das matrizes anteriores.

4. Considere o sistema nas incógnitas x, y e z e com os parâmetros α e β

$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ 2x + (\beta - 1)y + z = \alpha \\ 2x + y + \beta z = 0. \end{cases}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **falsa**:

- (a) Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.
- (b) Se $\beta = 1$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e determinado.
- (c) Se $\beta = 2$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.
- (d) Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.

5. Indique qual das afirmações seguintes é **falsa**:

- (a) Se A é uma matriz $m \times n$ então $r(A) \leq m$.
- (b) Se A é uma matriz $1 \times n$ então $r(A) = 1$.
- (c) Se A é uma matriz $m \times n$ então $r(A) \leq n$.
- (d) Se A é uma matriz $m \times 1$ então $r(A) < 2$.

6. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares em que A é uma matriz de tipo 3×5 tal que $r(A) = 3$. Indique qual das afirmações seguintes é **verdadeira**:

- (a) O sistema $AX = B$ é possível e determinado.
- (b) O sistema $AX = B$ é impossível.
- (c) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2.
- (d) O sistema $AX = B$ é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 3.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

A matriz $A + BC$ é igual a:

- (a) $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
- (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$
- (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Sejam A e B duas matrizes de ordem n . Indique qual das seguintes afirmações é **falsa**:

(a) $3A + 3B = 3(A + B)$.

(b) $4A + 4A = 4(2A)$.

(c) $(AB)^T = A^T B^T$.

(d) $A(3B) = 3(AB)$.

10. Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $r \times s$. Indique qual das seguintes afirmações é **falsa**:

(a) Se $A = B$ então $m = r$ e $n = s$.

(b) Se $m \neq r$ então $A \neq B$.

(c) Se $n \neq r$ então $A \neq B$.

(d) Se $A = B$ então $m = r$.

11. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, então:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A = B$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B = A$.

(c) $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B$.

(d) $B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A$.

12. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ escrita como um produto de matrizes elementares é:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$T = \{(a, a + b, a - b + \alpha) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

T é subespaço de $\mathbb{R}^3$ para:

(a) $\alpha = 1$.

(b) $\alpha = 2$.

(c) $\alpha = 3$.

(d) $\alpha = 0$.

14. Sendo α, β, γ reais tais que

$$\alpha(1, -1, 3, 2) + \beta(0, 1, 4, 5) + \gamma(-1, 1, 2, 2) = (2, 0, 9, 10)$$

então:

(a) $\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 1$.

(b) $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 1$.

(c) $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1$.

(d) $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 2$.

15. Indique qual das seguintes afirmações é **falsa**:

(a) O conjunto de todas as combinações lineares de 2 vectores u, v de $\mathbb{R}^n$, linearmente independentes é um plano.

(b) Um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenha $n + 1$ vectores é linearmente dependente.

(c) Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com um único vector é linearmente independente.

(d) Se $\{u, v\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então o conjunto $\{u + v, v\}$ também é linearmente independente.

16. Um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^3$ é:

- (a) $\{(1, 1, 1)\}$.
- (b) $\{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.
- (c) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)\}$.
- (d) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

17. A forma geral dos vectores que pertencem ao subespaço de $\mathbb{R}^3$

$$< (1, 2, 2), (0, -1, 1) >$$

é:

- (a) $(a, b, 3c)$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- (b) $(a, 2a - b, 2a + b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
- (c) $(a, 2a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
- (d) (a, a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

18. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$W = < (1, 2, 2), (0, -1, 1) > \quad \text{e} \quad U = < (1, 0, 4), (0, 1, -1) >$$

então:

- (a) $W \subset U$.
- (b) $U \subset W$.
- (c) $W = U$.
- (d) $W \neq U$.

Capítulo 2

SEGUNDA PARTE

2.1 DETERMINANTES

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 3 & a-1 \end{bmatrix}$$

Para que valores de a temos $\det(A) = 0$.

3. Usando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- a) através da segunda linha de A .
- b) através da primeira coluna de A .
- c) através da terceira linha de A .

4. Determine, sem fazer contas:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 3 & -4 & 12 & 6 & 7 \\ 12 & -2 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

5. Calcule o determinante das seguintes matrizes, usando transformações elementares:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ temos

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. Encontre os valores de k para os quais as seguintes matrizes são invertíveis:

a) $\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

9. Para cada uma das seguintes matrizes, calcule a matriz adjunta e a sua inversa:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. Se possível, resolva os seguintes sistemas, usando a Regra de Cramer.

a) $\begin{cases} 7x-3y=3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-y-z=-1 \\ y+z=0 \end{cases}$

11. Encontre o valor de x sem resolver para as outras incógnitas:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=4 \\ x-2y-z=2 \\ 3x+y+z=6 \end{cases}$$

12. Sabendo que A é uma matriz 4×4 tal que $\det(A) = -6$, calcule:

a) $\det(-A)$.

b) $\det(3A)$.

c) $\det(A^T)$.

d) $\det(A^{-1})$.

13. Seja A uma matriz de ordem n . Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $\det(I_n + A) = 1 + \det(A)$.

b) $\det(A^4) = (\det(A))^4$.

c) $\det(3A) = 3 \det(A)$.

d) Se $\det(A) = 0$, então o sistema homogêneo $AX = 0$ é possível e indeterminado.

14. Sejam A, B matrizes de ordem n . Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a) Se A é invertível e $\det(ABA) = 0$, então $\det(B) = 0$.
- b) Se A é invertível e $A^{-1} = A$, então $|A| = \pm 1$.
- c) Se a forma de escada reduzida de A tem uma linha nula, então $|A| = 0$.
- d) Não existe A tal que $|AA^T| = 1$.
- e) Se $|A| \neq 0$, então A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.

15. Calcule a área do paralelogramo determinado pelas colunas de A .

- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

16. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelas colunas de A .

- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
- b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. Calcule a área do paralelogramo cujos vértices são $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (4, 4)$, $P_3 = (7, 5)$ e $P_4 = (4, 3)$.

18. Calcule a área do triângulo cujos vértices são $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (3, 4)$ e $P_3 = (-1, 2)$.

19. Calcule o volume do paralelepípedo de lados $u = (2, -6, 2)$, $v = (0, 4, -2)$ e $w = (2, 2, -4)$.

20. Sejam $u = (2, 3, 5)$, $v = (0, 4, 1)$ e $w = (2, 5, 9)$. Calcule:

- a) $(u \times v) \times (v \times w)$.
- b) $(u \times v) - 4w$.
- c) $u \times (v \times w)$.
- d) $(u \times v) \times w$.

21. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a) Se A é uma matriz de ordem n , então $A \operatorname{adj}(A)$ é uma matriz diagonal.
- b) A regra de Cramer pode ser usada para resolver qualquer sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.
- c) Se A é uma matriz de ordem n invertível, então $\operatorname{adj}(A)$ também é invertível.

- d) Se A é uma matriz de ordem n com uma linha nula, então a $\text{adj}(A)$ também tem uma coluna nula.
- e) Se u, v, w são vectores de $\mathbb{R}^3$, então

$$u|(v \times w) = (u \times v)|w.$$

22. Diga quais dos seguintes vectores são vectores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

23. Verifique se $\lambda = 1$ é ou não valor próprio de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

24. Se possível, dê exemplos de:

- a) Uma matriz A de ordem 3 tal que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ seja vector próprio de A .
- b) Uma matriz de ordem 3 que admita o valor próprio 0.
- c) Uma matriz cujo polinómio característico seja $x^2 + 5x$.
- d) Uma matriz, não nula, de ordem 3 que tenha 2 como único valor próprio.
- e) Uma matriz de ordem 5 que admita o valor próprio 2 com multiplicidade algébrica 3 e o valor próprio 8 com multiplicidade algébrica 2.

25. Para cada uma das matrizes seguintes encontre os valores próprios e os respectivos subespaços próprios.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

26. Seja A uma matriz de ordem n . Mostre que

A é invertível se, e só se, zero não é valor próprio de A .

2.2 APLICAÇÕES LINEARES

1. Diga se as seguintes aplicações são lineares. Se não for, explique qual das propriedades falha:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, y)$.
- b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x^2, y)$.
- c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, x + y + z)$.
- d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (1, 1)$.
- e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + 1, 2x + y - z)$.
- f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (2x - 4z, y - 5z)$.

2. Determine a matriz canônica da aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (y - z, 2x, 4y + z, x + y + z)$.

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $f(x, y, z) = (3x - y, y + 4z, 5x, x - 7z, z)$.

- a) Mostre que f é uma aplicação linear.
- b) Calcule $f(-3, 0, 5)$.
- c) Determine a matriz canônica de f .
- d) Calcule $f(-3, 0, 5)$, usando a matriz canônica de f .

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(1, 0) = (3, 2, 4)$ e $f(0, 1) = (2, -1, 5)$.

- a) Determine a matriz canônica de f .
- b) Calcule $f(-2, 1)$.
- c) Determine $f(x, y)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canônica é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Calcule $f(3, 3, 3)$.
- b) Determine $f(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- c) Encontre, se houver, um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

6. Use a multiplicação de matrizes para determinar a imagem do vector $(-2, 1)$ através da aplicação linear:

- a) A rotação de 45° em torno da origem.
- b) A rotação de 60° em torno da origem.

7. Desenhe a imagem do rectângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$ através

- a) Da rotação de -45° em torno da origem.
- b) Da rotação de 45° em torno da origem.

8. Explique o efeito geométrico da multiplicação pela matriz:

- a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

9. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. Determine o núcleo e a imagem de f .

10. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + z, 4y - z, 0)$. Determine o núcleo e a imagem de f .

11. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + z, y - z)$. Verifique se $(3, 3, 0)$ pertence à imagem de f .

12. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

13. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

14. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, y - z, 7z).$$

Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

15. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (y + z, x + z, 4z)$. Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

16. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- a) Existem aplicações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
- b) Existem aplicações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
- c) Existem aplicações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.

- d) Existem aplicações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
- e) Qualquer aplicação linear injectiva de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.
- f) Qualquer aplicação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^5$ é injectiva.
17. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - 5y)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) = (-4x, -x + 2y)$.
- a) Determine as matrizes canónicas de f e de g .
- b) Determine as matrizes canónicas de $f \circ g$ e de $g \circ f$, usando a alínea a).
- c) Use a alínea b) para determinar $(f \circ g)(x, y)$.
18. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (3x - y + z, x - 5y, z)$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y, z) = (x, y - z, x + 2y)$.
- a) Determine as matrizes canónicas de f e de g .
- b) Determine as matrizes canónicas de $f \circ g$ e de $g \circ f$, usando a alínea a).
- c) Use a alínea b) para determinar $(f \circ g)(x, y, z)$.
19. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - 5y, z)$. Verifique se f é injectiva e em caso afirmativo, determine a matriz canónica de f^{-1} .
20. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x - y, -x - y)$. Verifique se f é injectiva e em caso afirmativo, determine a matriz canónica de f^{-1} .
21. Sejam f e g duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $x \in Nuc(g)$ então $x \in Nuc(f \circ g)$.

2.3 EXERCÍCIOS DE REVISÃO DA SEGUNDA PARTE

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Indique qual a afirmação falsa:

- (a) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.
- (b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{9}{2}$
- (c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. A entrada $(3, 2)$ da matriz $\text{adj}(B)$ é:

- (a) -1
- (b) 4
- (c) -4
- (d) 1

3. Seja A uma matriz de ordem n . Prove que:

- (a) A é invertível se, e só se, $\text{adj}(A)$ é invertível.
- (b) $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$.
- (c) Se a matriz tem ordem 2, então $|\text{adj}(A)| = |A|$.

4. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz B é:

- (a) 9
- (b) -4
- (c) 3
- (d) -1

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$. Para que valores de a a matriz é invertível?

- (a) Para $a = 3$ ou $a = -1$.
- (b) Para qualquer valor real.
- (c) Para $a = 3$.
- (d) Para qualquer valor real excepto 3 e -1 .

6. Seja A uma matriz de ordem n . Indique qual das seguintes afirmações é falsa.

- (a) Se A é invertível então o seu determinante é diferente de zero. A recíproca desta afirmação é verdadeira.
- (b) A matriz A é invertível se, e só se, o seu determinante é igual a zero.
- (c) A matriz A é invertível se, e só se, o seu determinante é diferente de zero.

- (d) Se o determinante de A é diferente de zero então A é invertível. A recíproca desta afirmação é verdadeira.

7. Considere o sistema de equações lineares na sua forma matricial $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Qual a afirmação falsa?

- (a) $|A| = -10$ logo o sistema é de Cramer.
 (b) O volume do paralelepípedo definido por $u = (0, 1, -1)$, $v = (2, 3, 1)$ e $t = (-1, 2, 1)$ é 10.
 (c) A área do triângulo de lados adjacentes $u = (0, 1, -1)$, e $t = (-1, 2, 1)$ é $\frac{\sqrt{11}}{2}$.
 (d) O sistema é possível e determinado sendo $y = \frac{1}{2}$.
8. Considere os pontos $A = (0, 1, 1)$, $B = (2, -1, 0)$ e $C = (-1, 0, 1)$.
- (a) Justifique que os pontos A , B e C são vértices de um triângulo.
 (b) Determine a área do triângulo de vértices A , B e C .
 (c) Calcule o volume do paralelepípedo definido por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
9. Seja $\mathcal{A}$ a área do paralelogramo definido pelos vectores $u = (1, a)$ e $v = (1, b)$, com $b \neq 0$. Qual das seguintes afirmações é falsa.
- (a) Se $a = -b$ então $\mathcal{A} \neq 0$
 (b) Se $a = b$ então $\mathcal{A} = 0$
 (c) Se $a = 2b$ então $\mathcal{A} \neq 0$
 (d) Se $ab \neq 0$ então $\mathcal{A} \neq 0$

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine qual dos vectores é vector próprio de A :

- (a) $(2, 0, 1)$
 (b) $(0, 0, 1)$
 (c) $(0, 0, 0)$
 (d) $(0, 1, 1)$

11. O polinómio característico da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é:

- (a) $(\lambda + 2)\lambda^2$
 (b) $(\lambda - 2)\lambda^2$

(c) $(\lambda + 2)\lambda$

(d) $(\lambda - 2)\lambda$

12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine os valores próprios de A e os respectivos subespaços próprios.

13. Seja A e B matrizes de ordem n , invertíveis. Mostre que

$$\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A).$$

14. Considere as seguintes aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y + z, 2z, 3z)$$

$$g(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y + z, 2z, 3z^2)$$

$$h(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y + z, 2z, 3z + 5)$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Indique se cada uma das aplicações é linear. Em caso afirmativo, indique:

- (a) a matriz canónica da aplicação.
- (b) o núcleo da aplicação.
- (c) o conjunto imagem da aplicação.
- (d) se a aplicação é injectiva.
- (e) se a aplicação é sobrejectiva.
- (f) se a aplicação é invertível.

15. Considere as seguintes aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, 0)$$

$$g(x, y, z) = (y, z, x)$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Determine:

- (a) M_f e M_g .
- (b) $M_{f \circ g}$.
- (c) $(f \circ g)(x, y, z)$.

16. Considere a aplicação linear cuja matriz canónica é

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine $f(1, 1, 1)$
- (b) Prove que $\text{Nuc } f = \langle (-1, 1, 2) \rangle$. Será f injectiva?
- (c) Verifique se existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (1, -1)$.
- (d) Determine $f(x, y, z)$.

17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação linear definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

A matriz canónica de f é:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicação linear definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z, z).$$

f é invertível? Em caso afirmativo, determine a matriz canónica da inversa de f .

Capítulo 3

TERCEIRA PARTE

3.1 BASES

1. Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores:
 - a) $v_1 = (1, -3, 4)$, $v_2 = (2, -6, 8)$, $v_3 = (1, 1, 0)$.
 - b) $v_1 = (0, 3, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0)$.
 - c) $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, 6, 4)$, $v_3 = (0, 3, 2)$.
 - d) $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (2, 4, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 2, -1)$.
2. Sem fazer contas, mostre que os seguintes vectores não formam uma base do espaço vectorial indicado:
 - a) $v_1 = (2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$.
 - b) $v_1 = (2, 3)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (4, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.
 - c) $v_1 = (0, 2, 3)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 4, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - d) $v_1 = (0, 2, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - c) $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 4)$ de $\mathbb{R}^2$.
3.
 - a) Mostre que os vectores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 4, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $v_4 = (-1, 1, -1)$ geram $\mathbb{R}^3$ mas não formam uma sua base.
 - b) Escreva o vector $(1, 2, 1)$, de três maneiras diferentes, como combinação linear dos vectores da alínea a).
4. Mostre que o conjunto formado pelos seguintes vectores é linearmente independente e determine uma base do espaço que inclua estes vectores:
 - a) $v_1 = (0, 2, 3)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - b) $v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
 - c) $v_1 = (0, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.

5. Mostre que $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e escreva o vector $(2, 1, 2)$ como combinação linear dos vectores de S .
6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal $f(x, y, z) = (x + y, y - 2z, x + 2y - 2z, 0)$.
 - a) Determine uma base de $Nucf$.
 - b) Determine a dimensão de Imf .
7. Considere as base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
 - a) Determine as coordenadas do vector $u = (1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}$.
 - b) Determine as coordenadas do vector $u = (1, 1, 0)$ na base $\mathcal{B}'$.
8. Determine uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $Nucf = \langle (1, 0, 3, 0), (-1, 2, 0, 0), (0, 2, 3, 0) \rangle$ e $\langle (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle \subseteq Imf$.
9. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que $f(1, 1, 1) = (1, 0, 0, 0)$, $f(0, 1, 1) = (1, 2, 0, 0)$ e $f(0, 0, 2) = (4, 2, 0, 0)$.
 - a) Mostre que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Determine as coordenadas do vector $(2, 2, 0)$ em relação à base $\mathcal{B}$.
 - c) Calcule $f(2, 2, 0)$.
 - d) Determine a matriz canónica de f .
 - e) Determine $f(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 - f) Determine uma base de $Nucf$.
 - g) Qual a dimensão de Imf ?
10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(1, 1, 1) = (2, 1, -1)$, $f(0, 1, 1) = (1, 0, 2)$ e $f(0, 1, 2) = (4, 0, 8)$.
 - a) Mostre que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Determine as coordenadas do vector $(1, 3, 4)$ em relação à base $\mathcal{B}$.
 - c) Calcule $f(1, 3, 4)$.
 - d) Determine a matriz canónica de f .
 - e) Determine $f(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 - f) Determine uma base de $Nucf$.
 - g) Qual a dimensão de Imf ?
11. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
12. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (-4x, x - y, y)$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

13. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ e $b.c. = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (base canónica) duas bases de $\mathbb{R}^3$. Determine:

- a) $M(f; \mathcal{B}, b.c.)$.
 - b) $M(f; b.c., \mathcal{B})$.
 - c) $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
14. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- a) $f(1, 1, 1)$.
 - b) se existir, um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (0, -1, 1, 0)$.
 - c) $M(f; b.c. \text{ de } \mathbb{R}^3, b.c. \text{ de } \mathbb{R}^4)$, em que b.c. significa base canónica.
15. Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é a aplicação nula, então a matriz de f em relação a quaisquer bases de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$ é a matriz nula.
16. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear injectiva. Mostre que se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ então $\{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.
17. Sejam f e g duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases de $\mathbb{R}^n$. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
- a) Se $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ então $f(x) = g(x)$, para qualquer vector x de $\mathbb{R}^n$.
 - b) Se $M(f; \mathcal{B}, b.c. \text{ de } \mathbb{R}^n) = M(g; \mathcal{B}', b.c. \text{ de } \mathbb{R}^n)$ então $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.
 - c) Se $M(f; \mathcal{B}, b.c. \text{ de } \mathbb{R}^n) = I_n$ então f é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.
 - d) Se $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n$ então f é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.

3.2 DIAGONALIZAÇÃO

1. Mostre que A e B não são matrizes semelhantes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Seja A uma matriz cujo polinómio característico é

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2.$$

Determine:

- a) o tamanho de A .
- b) os valores próprios de A e suas multiplicidades algébricas.
- c) quais as possíveis multiplicidades geométricas dos valores próprios de A .

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine os valores próprios de A e as suas multiplicidades algébricas e geométricas.

4. Determine se A é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

e) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Comentário Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear e, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são duas bases de $\mathbb{R}^n$, então as matrizes $M(f : \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $M(f : \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ são semelhantes. Assim, têm os mesmos valores próprios com as mesmas multiplicidades algébricas e geométricas, pelo que podemos afirmar que esses valores próprios são os de f com essas multiplicidades algébricas e geométricas. Da mesma forma afirmamos que f é diagonalizável se, e só se, $M(f : \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é diagonalizável, sendo $\mathcal{B}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^n$.

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (-2x + y - z, x - 2y - z, -x - y - 2z).$$

Determine os valores próprios de f e mostre que f é diagonalizável.

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (-y + z, -x + z, x - y)$. Determine os valores próprios de f e mostre que f é diagonalizável.
8. Mostre que se A é uma matriz de ordem n diagonalizável, então A^k é diagonalizável, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.
9. Sejam A , B e C matrizes quadradas. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
- Qualquer matriz quadrada é semelhante a si própria.
 - Se A é semelhante a B e B é semelhante a C , então A é semelhante a C .
 - Se A e B são invertíveis e semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.
 - Se cada valor próprio de A tem multiplicidade algébrica 1, então A é diagonalizável.
 - Matrizes singulares não são diagonalizáveis.
10. Determine se A é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$

d) $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$

11. Escreva a forma quadrática em notação matricial $X^T AX$, sendo A uma matriz simétrica.

a) $3x^2 + 5y^2.$

b) $-x^2 - 6xy + 14y^2.$

12. Determine uma fórmula para a forma quadrática que não utilize matrizes.

a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

13. Determine uma forma quadrática diagonal da seguinte forma quadrática.

a) $3x^2 - 4xy - 6y^2.$

b) $x^2 + 2xy + y^2.$

14. Para cada uma das seguintes formas quadráticas, determine uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a forma quadrática seja diagonal.

a) $2x^2 + 4xy + 2y^2.$

b) $-4x^2 + 3xy.$

c) $-\frac{1}{3}x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2.$

15. Classifique as seguintes cónicas de $\mathbb{R}^2$.

a) $2x^2 - y^2 + 8 = 0.$

b) $4x^2 + y^2 - 3 = 0.$

16. Classifique as seguintes cónicas de $\mathbb{R}^2$.

a) $2y^2 - y + 12 = 0.$

b) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2 = 0.$

c) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 6y - 4 = 0.$

d) $x^2 + x + y - 3 = 0.$

17. Classifique as seguintes cónicas de $\mathbb{R}^2$.

a) $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8 = 0.$

b) $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9.$

c) $xy = 8.$

d) $3xy = -1.$

18. Classifique as seguintes cónicas de $\mathbb{R}^2$.

- a) $-4x^2 + 3xy + x - 6y + 2 = 0$.
- b) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x - 5y + 9 = 0$.
- c) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + 2xy - 2x + y + \frac{14}{13} = 0$.

19. Considere a equação cartesiana

$$2(x+2)^2 - y^2 + 8 = 0.$$

- (a) Efectue uma translação de coordenadas por forma a equação anterior representar uma cónica conhecida.
- (b) Determine o centro da cónica de equação $2(x+2)^2 - y^2 + 8 = 0$.
- (c) Esboce o desenho da cónica de equação $2(x+2)^2 - y^2 + 8 = 0$.

3.3 ESPAÇOS VECTORIAIS

1. Considere $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações: Sendo $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\alpha \odot (v_1, v_2) = (\alpha v_1, 0).$$

- a) Calcule $(-1, 2) \oplus (3, 0)$.
 - b) Calcule $2 \odot (3, -1)$.
 - c) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?
2. Considere $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações: Sendo $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1)$$

$$\alpha \odot (v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

- a) Calcule $(-1, 1) \oplus (4, -5)$.
 - b) Calcule $7 \odot (2, -2)$.
 - c) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?
3. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ (com as operações usuais):
- a) As matrizes singulares de ordem n .
 - b) As matrizes diagonais de ordem n .
 - c) As matrizes simétricas de ordem n .

4. Seja E o conjunto das matrizes triangulares superiores, de ordem 2.
- Mostre que E é um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ (com as operações usuais).
 - Determine uma base de E e a dimensão de E .
5. Sendo $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, mostre que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e escreva A como combinação linear dos vectores dessa base.
6. Sendo $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = 9x + 2$, $p_3(x) = 4x^2 + 3x + 3$ e $p(x) = -3x^2 + 17x + 2$, mostre que $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2[x]$ e escreva $p(x)$ como combinação linear dos vectores dessa base.

7. Considere $\mathbb{R}$ com as seguintes operações: Sendo u, v e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u \oplus v = u + v - 1$$

$$\alpha \odot v = \alpha v + (1 - \alpha).$$

- Calcule $-1 \oplus 3$.
 - Calcule $0 \odot 3$.
 - $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?
8. Mostre que é impossível existir um espaço vectorial formado unicamente por dois vectores distintos.
9. Seja V um espaço vectorial real e $u, v \in V$. Sendo $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $f(u) = (2, 1)$ e $f(v) = (-1, 4)$, determine $f(u + v)$.
10. Seja V um espaço vectorial real e $u, v \in V$. Sendo $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $f(u + v) = (6, 1)$ e $f(2u - v) = (-3, 0)$, determine $f(u)$ e $f(v)$.
11. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $f(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a + b & b \\ c - a & 0 \end{bmatrix}$. Determine
- o núcleo e a imagem de f .
 - $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}_2[x]$ do exercício 6. e $\mathcal{B}'$ é a base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ do exercício 5..
12. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base $\{x^3, x^2, x + 1, 4\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

- Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

- b) Determine $f(a, b)$ com $(a, b) \in \mathbb{R}$.
13. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
- Se f é uma aplicação do espaço vectorial real E no espaço vectorial real V tal que $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então f é aplicação linear.
 - $f(a, b, c) = ax^2 + bx + c$ com $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, define uma aplicação linear injectiva de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}_2[x]$.
 - O espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tem dimensão nm .
 - $f(a, b, c) = (a - b)x^2 + (b - c)x + (a - c)$ com $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, define uma aplicação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}_2[x]$.
14. Sendo $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que $f(1) = x + 1$, $f(2x) = -2x + 1$ e $f(3x^2) = 3x + 1$, determine $f(-x^2 + 4x + 2)$.

3.4 EXERCÍCIOS DE REVISÃO DA TERCEIRA PARTE

- Em $\mathbb{R}^4$ considere o subespaço $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = -c, d = 0\}$. Uma base de F é o conjunto:
 - $\{(1, -1, 1, 0)\}$
 - $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$
 - $\{(0, -1, 1, 0)\}$
 - $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0)\}$
- Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1, 0, 0) = (1, 2), \quad f(0, 1, 0) = (-2, -4) \text{ e } f(0, 0, 2) = (0, 2).$$
 - Mostre que $\{(1, 2), (0, 2)\}$ é uma base da imagem de f .
 - A aplicação f é sobrejectiva?
 - Determine o núcleo de f e a sua dimensão.
 - Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}' = \{(2, 0), (1, 1)\}$, determine a matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
- Uma matriz A de ordem 3 tem os valores próprios 2 e -3 , sendo $(0, 2, 0)$ um vector próprio associado ao valor próprio 2 e, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ vectores próprios associados ao valor próprio -3 . Se $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então

$$(a) \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Em $\mathbb{R}^3$ considere o subespaço $F = \langle (2, 1, 1), (-1, 0, 1), (5, 3, 4) \rangle$. A dimensão de F é:

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3

5. Em $\mathbb{R}^3$ considere o subespaço $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y, z = y\}$. A dimensão de G é:

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (2a + b, b - c),$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}_2 = \{(2, -1), (0, 1)\}$. Sejam $\mathcal{B}'_1$ e $\mathcal{B}'_2$, respectivamente as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$. Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

$$(a) \quad M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad M(f; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} M(f; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2)$$

$$(c) \quad M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad M(f; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_2) = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que

$$g(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b - c \\ 2b & a \end{bmatrix},$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Mostre que $\text{Nuc } g = \{(0, 0, 0)\}$.
- (b) Justifique que $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ pertence à imagem de g .
- (c) Sem determinar a imagem de g , justifique que g não é sobrejectiva.
- (d) Indique uma base da imagem de g .

8. No espaço vectorial real $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ considere o seguinte conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

- (a) S é linearmente independente.
- (b) O subespaço gerado por S é $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (c) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.
- (d) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

9. Indique qual das seguintes afirmações é falsa:

- (a) O conjunto das matrizes triangulares superiores de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- (b) O conjunto das matrizes invertíveis de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ não é um subespaço vectorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- (c) O conjunto das matrizes simétricas de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.
- (d) O conjunto das matrizes idempotentes de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (isto é, o conjunto das matrizes $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = A$) é um subespaço vectorial de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule os valores próprios de A .
- (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A .

(c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Sejam E um espaço vectorial real, $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear, $F = \text{Nuc } f$ e

$$G = \{x \in E : f(x) = x\}.$$

Prove que:

- (a) G é um subespaço de E .
- (b) $F \cap G = \{0_E\}$.
- (c) Se $x \in F$ e $y \in G$ são tais que $x + y = 0_E$ então $x = 0_E$ e $y = 0_E$.
- (d) Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, \dots, y_m\}$ são conjuntos linearmente independentes de F e G , respectivamente, então $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ é um conjunto linearmente independente de E .

12. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. indique qual das afirmações seguintes é falsa:

- (a) S é um subespaço de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto linearmente independente de S .
- (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto linearmente independente de S .
- (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de S .

13. No espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ considere os subespaços:

$$F = \langle x^2 + x + 2, x + 1 \rangle \quad G = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : a + b = 0\}.$$

Indique qual das afirmações seguintes é falsa:

- (a) $G = \langle x^2 - x, 1, x^2 - x + 6 \rangle$
- (b) $\{x^2 - x, 1\}$ é uma base de G .
- (c) $2x^2 - 2x + 3 \in (F \cap G)$
- (d) $\dim(F) = 2$

14. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e considere as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- (a) $M(f : \mathcal{B}', \mathcal{B}) = PA$
- (b) $M(f : \mathcal{B}', \mathcal{B}) = AP$
- (c) $M(f : \mathcal{B}', \mathcal{B}) = QA$
- (d) $M(f : \mathcal{B}', \mathcal{B}) = AQ$

15. Considere a equação cartesiana

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 - 8 = 0.$$

- (a) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a forma quadrática $4x^2 - 8xy + 4y^2$ seja $8x^2$.
- (b) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a forma quadrática $4x^2 - 8xy + 4y^2$ seja $8y^2$.
- (c) Identifique o tipo de cônica representada pela equação cartesiana.
- (d) Esboce o desenho da cônica de equação $4x^2 - 8xy + 4y^2 - 8 = 0$.

16. Identifique o tipo de cônica representado pela equação

$$2x^2 + 5y^2 = 20.$$

17. Identifique o tipo de cônica representado pela equação

$$7y^2 - 2x = 0.$$

18. Determine uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Nuc(f) = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle$ e $Im(f) \supseteq \langle (1, 2) \rangle$.

19. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x, x - y, x + y + z)$, para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$. Determine:

- (a) Os valores próprios de f .
- (b) Se f é diagonalizável.

20. Identifique o tipo de cônica representado pela equação

$$4x^2 + 9y^2 = 1.$$

21. Identifique o tipo de cônica representado pela equação

$$-x^2 = 2y.$$

22. Identifique o tipo de cónica representado pela equação

$$x^2 - y^2 - 8 = 0.$$

23. Identifique o tipo de cónica representado pela equação

$$x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

24. Considere a equação cartesiana

$$3(x - 3)^2 + 5(y - 1)^2 - 10 = 0.$$

- (a) Efectue uma translação de coordenadas por forma a equação anterior representar uma cónica conhecida.
 - (b) Determine o centro da cónica de equação $3(x - 3)^2 + 5(y - 1)^2 - 10 = 0$.
 - (c) Esboce o desenho da cónica de equação $3(x - 3)^2 + 5(y - 1)^2 - 10 = 0$.
25. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não são semelhantes.

26. Considere a equação cartesiana

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0.$$

- (a) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a forma quadrática $11x^2 + 24xy + 4y^2$ seja uma forma quadrática diagonal.
 - (b) Identifique o tipo de cónica representada pela equação cartesiana.
 - (c) Esboce o desenho da cónica de equação $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0$.
27. Considere a equação cartesiana

$$x^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0.$$

- (a) Efectue uma translação de coordenadas por forma a equação anterior representar uma cónica conhecida.
 - (b) Determine o centro da cónica de equação $x^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0$.
 - (c) Esboce o desenho da cónica de equação $x^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0$.
28. Considere a equação cartesiana

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}.$$

- (a) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a forma quadrática $x^2 + xy + y^2$ seja uma forma quadrática diagonal.
- (b) Identifique o tipo de cónica representada pela equação cartesiana.
- (c) Esboce o desenho da cónica de equação $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$.

29. Considere a forma quadrática $x^2 + xy + y^2$ na base canónica de $\mathbb{R}^2$. Na base $\mathcal{B} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$ ela é:

- (a) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.
- (b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2$.
- (c) $2x^2$.
- (d) $2y^2$.

30. Considere a equação cartesiana

$$3(x-1)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0.$$

- (a) Efectue uma translação de coordenadas por forma a equação anterior representar uma cónica conhecida.
- (b) Determine o centro da cónica de equação $3(x-1)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0$.
- (c) Esboce o desenho da cónica de equação $3(x-1)^2 + (y-1)^2 - 9 = 0$.

31. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não são semelhantes.

32. Considere a equação cartesiana

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9.$$

- (a) Determine uma base de $\mathbb{R}^2$ na qual a forma quadrática $5x^2 + 4xy + 5y^2$ seja uma forma quadrática diagonal.
- (b) Identifique o tipo de cónica representada pela equação cartesiana.
- (c) Esboce o desenho da cónica de equação $5x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$.

33. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (-6a + 3b, -6a + 3b + 8c),$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- (a) Determine uma base de $Nuc(f)$
- (b) Determine uma base de $Im(f)$
- (c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $Nuc(f)$
- (d) Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, sendo $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}_1 = \{(2, -1), (0, 1)\}$

34. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Determine:

- (a) Os valores próprios de A .

- (b) Os subespaços próprios de A .
- (c) Se a matriz A é diagonalizável.
35. Determine, se possível, uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Nuc(f) = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$.
36. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine:
- (a) Os valores próprios de A .
- (b) $mg(1)$.
- (c) Os subespaços próprios de A .
- (d) Se a matriz A é diagonalizável.
37. No espaço $\mathbb{R}_3[x]$ considere o subespaço $G = \langle x^3 + 2x, 2x^3 + 4x + 1 \rangle$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:
- (a) $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : b = 0\}$
- (b) $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : c = 2a\}$
- (c) $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : b = 0, c = 2a\}$
- (d) $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : b = 0 \text{ ou } c = 2a\}$

38. Para qualquer aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e para quaisquer quatro bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ de $\mathbb{R}^3$, se

$$A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_4), \quad B = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3), \quad C = M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \text{ e } D = M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4)$$

então:

- (a) $A = BCD$
- (b) $A = DBC$
- (c) $A = C^{-1}BD$
- (d) $A = CBD$
39. Sejam E um espaço vectorial real e $\{u_1, \dots, u_n\}$ um conjunto linearmente independente de E . Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ números reais tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n.$$

Mostre que $\alpha_i = \beta_i$, para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$.

40. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Indique o polinómio característico de A .

- (b) Determine os subespaços próprios de A .
- (c) Mostre que A é diagonalizável.
- (d) Determine uma matriz P de ordem 3, invertível e uma matriz diagonal D , de ordem 3, tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

41. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

- (a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.
- (b) Determine os subespaços próprios de A .
- (c) Mostre que A é diagonalizável.
- (d) Determine uma matriz P de ordem 3, invertível e uma matriz diagonal D , de ordem 3, tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

42. Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(ax^2 + bx + c) = (c - a, 0, 2b),$$

para todo $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

- (a) Determine uma base de $Nuc(f)$
- (b) Determine uma base de $Im(f)$
- (c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores da base determinada em b).
- (d) Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, sendo $\mathcal{B} = \{-x^2, x, 2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1 = \{(0, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$

43. Sejam $\mathcal{B} = \{-x^2 + x, -3x, 2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$. Considere $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine uma base de $Nuc(f)$
- (b) Determine uma base de $Im(f)$
- (c) Determine, se possível $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f(ax^2 + bx + c) = (1, 0, 0)$.
- (d) Determine $M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$, sendo $\mathcal{B} = \{-x^2, x, 2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_3 = \{(0, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$

44. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine $f(x, y, z)$.

45. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços reais de um espaço vectorial real V . Mostre que $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V .

46. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma base de $Nuc(f)$ é

- (a) $\{(1, 1, -1)\}$
- (b) $\{(1, 1, 0)\}$
- (c) $\{(-1, -2, 1)\}$
- (d) $\{(1, 0, 0)\}$

47. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A dimensão de $Im(f)$ é

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3

48. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z, w) = (x + w, y - z, 2z, 4w)$, para todo o $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Determine:

- (a) Os valores próprios de f .
- (b) Se f é diagonalizável.

49. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes vectores pertence à $Im(f)$?

- (a) $(-1, 0, 0)$
- (b) $(0, 2, 0)$
- (c) $(1, 1, 0)$
- (d) $(1, 1, 1)$

50. Em $\mathbb{R}^3$ considere as bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$.
Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ é

(a) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

51. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $f(1, 1, 2)$ é

(a) $(0, 1, 2)$

(b) $(0, 3, 2)$

(c) $(1, 0, 1)$

(d) $(3, -1, 1)$

52. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira:

(a) $ma(1) = mg(1) = 1$

(b) $ma(1) = 2, mg(1) = 1$

(c) $ma(1) = mg(1) = 2$

(d) $ma(1) = 1, mg(1) = 2$

53. Seja Q uma forma quadrática, $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja matriz associada é M . Mostre que:

- (a) $Q((x, y) + (u, v)) = Q(x, y) + 2 \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + Q(u, v)$ com $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
 (b) $Q(c(x, y)) = c^2 Q(x, y)$ com $x, y, c \in \mathbb{R}$.

54. Em $\mathbb{R}_2[x]$ o conjunto

$$T = \{x^2 - 4x, ax^2 + 8, 3x + 2\}$$

não é um conjunto linearmente independente para

- (a) $a = 4$
 (b) $a = 1$
 (c) $a = 2$
 (d) $a = 3$
55. seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $Nuc(f) = \langle (1, 0, 0), (3, 2, 0), (5, 0, 0) \rangle$.
 A dimensão da $Im(f)$ é:

- (a) 3
 (b) 1
 (c) 0
 (d) 2

56. Seja $W = \langle (-4, 0, 0), (3, 2, 0), (5, 0, 0) \rangle$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Uma base de W é o conjunto:

- (a) $\{(-4, 0, 0), (3, 2, 0), (5, 0, 0)\}$
 (b) $\{(-4, 0, 0), (5, 0, 0)\}$
 (c) $\{(-4, 0, 0), (3, 2, 0)\}$
 (d) $\{(3, 2, 0)\}$

57. Determine, se possível, uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Nuc(f) = \{(0, 0)\}$ e $(1, 0, 0) \in Im(f)$.

58. O centro da cônica de equação

$$(x + 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 25$$

é:

- (a) $(-1, 3)$.
 (b) $(1, -3)$.
 (c) $(5, \frac{5}{2})$.
 (d) $(-5, -\frac{5}{2})$.

59. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x + y, -4x - 2y)$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$. Verifique se f é diagonalizável.