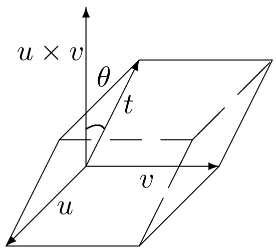
ÁLGEBRA LINEAR
e
GEOMETRIA ANALÍTICA

$$u = (0, -6, 0), \qquad v = (6, 0, 0), \qquad t = (2, 2, 3)$$



$$volume = (u \times v)|t = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 108$$

Rosário Fernandes
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNL

(2010/11)

Índice

1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES **1**

1.1 Introdução aos Sistemas de Equações Lineares 1
1.2 Solução e Conjunto-Solução de um Sistema 3
1.3 Interpretação Geométrica do Conjunto-Solução de um Sistema 4
1.4 Sistemas e Matrizes 6
1.5 Exercícios (Escolha Múltipla) 9
1.6 Método de Eliminação de Gauss 11
1.7 Aplicação dos Sistemas de Equações Lineares 16
1.7.1 Cores dos Ecrãs de Televisão 16
1.8 Exercícios (Escolha Múltipla) 18
1.9 Característica de uma Matriz 20
1.10 Discussão de um Sistema 21
1.11 Exercícios (Escolha Múltipla) 26
1.12 Exercícios 28

2 OPERAÇÕES COM MATRIZES **33**

2.1 Definições Básicas e Exemplos de Matrizes 33
2.2 Operações com Matrizes 36
2.2.1 Soma de Matrizes e Produto de um Escalar por uma Matriz 36
2.2.2 Produto de uma Matriz por uma Matriz Coluna 37
2.2.3 Exercícios (Escolha Múltipla) 40
2.2.4 Produto de Duas Matrizes 41
2.2.5 Transposta de uma Matriz 45
2.2.6 Inversa de uma Matriz 46
2.2.7 Exercícios (Escolha Múltipla) 48
2.2.8 Potências de uma Matriz 50
2.3 Matrizes Elementares 51
2.4 Caracterização das Matrizes Invertíveis 53
2.5 Exercícios (Escolha Múltipla) 55
2.6 Aplicações das Matrizes 57
2.6.1 Uma Aplicação à Robótica 57
2.6.2 Resolução de Sistemas 58
2.7 Exercícios (Escolha Múltipla) 59
2.8 Exercícios 61

3 SUBESPAÇOS VECTORIAIS DE $\mathbb{R}^n$ **65**
3.1 Definição de Subespaço Vectorial de $\mathbb{R}^n$ . . . 65
3.2 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 70
3.3 Subespaço Gerado . . . 71
3.4 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 74
3.5 Dependência e Independência Linear . . . 75
3.6 Aplicações . . . 78
3.6.1 Som de Alta Fidelidade . . . 78
3.7 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 79
3.8 Exercícios . . . 79

4 DETERMINANTES **83**
4.1 Definição de Determinante . . . 83
4.2 Teorema de Laplace . . . 85
4.3 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 89
4.4 Determinante e Transformações Elementares . . . 90
4.5 Outra Caracterização das Matrizes Invertíveis . . . 93
4.6 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 95
4.7 Sistemas de Cramer . . . 97
4.8 Determinante do Produto de Matrizes . . . 98
4.9 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 101
4.10 Interpretação Geométrica de Determinantes 2×2 . . . 101
4.11 Produto Externo e Produto Misto de Vectores de $\mathbb{R}^3$ . . . 103
4.12 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 107
4.13 Exercícios . . . 107

5 APLICAÇÕES LINEARES **111**
5.1 Definições e Notações . . . 111
5.2 Definição de Aplicação Linear . . . 112
5.3 Matriz Canónica de uma Aplicação Linear . . . 115
5.4 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 120
5.5 Núcleo e Imagem de uma Aplicação Linear . . . 121
5.6 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 128
5.7 Composição de Aplicações . . . 129
5.8 Aplicações Lineares Invertíveis . . . 131
5.9 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 133
5.10 Exercícios . . . 134

6 BASES **137**
6.1 Definição e Exemplos de Bases . . . 137
6.2 Dimensão de um Subespaço . . . 140
6.3 Alguns Resultados sobre Bases . . . 142
6.4 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 146
6.5 Coordenadas em Relação a uma Base . . . 148
6.6 Matriz de uma Aplicação Linear . . . 149
6.7 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 151
6.8 Matriz Mudança de Base . . . 153
6.9 Exercícios (Escolha Múltipla) . . . 159

6.10 Exercícios 160

7 DIAGONALIZAÇÃO **163**
7.1 Valores e Vectores Próprios de Matrizes 163
7.2 Exercícios (Escolha Múltipla) 167
7.3 Diagonalização de Matrizes Quadradas 168
7.4 Exercícios (Escolha Múltipla) 175
7.5 Exercícios 176

8 ESPAÇOS VECTORIAIS **181**
8.1 Conceitos principais 181
8.2 Exercícios (Escolha Múltipla) 186
8.3 Aplicações Lineares 188
8.4 Exercícios (Escolha Múltipla) 190
8.5 Exercícios 191

9 APÊNDICE **195**
9.1 Outra Aplicação dos Sistemas: Análise de Redes 195
9.2 Produto Interno de Vectores 197

BIBLIOGRAFIA **198**

Capítulo 1

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A resolução de sistemas de equações lineares e a interpretação geométrica das suas soluções constituem dois dos principais tópicos estudados em Álgebra Linear. Neste capítulo abordaremos um processo sistemático de resolução de sistemas de equações lineares e daremos um exemplo de aplicação dos sistemas.

1.1 Introdução aos Sistemas de Equações Lineares

Nesta primeira secção iremos introduzir alguma terminologia básica.

Uma equação da recta em $\mathbb{R}^2$ pode ser dada pela expressão

$$a_1x + a_2y = b,$$

em que a_1, a_2 não são ambos nulos, e uma equação geral do plano em $\mathbb{R}^3$ pode ser dada pela expressão

$$a_1x + a_2y + a_3z = b,$$

em que a_1, a_2, a_3 não são todos nulos. Estas duas equações são exemplos de equações lineares.

Vejamos a definição deste conceito.

Definição 1.1 *Uma* **equação linear** *nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, ..., a_n$ são constantes (a que chamaremos **coeficientes***) não todas nulas e b é outra constante.*

No caso de $b = 0$, teremos a equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0,$$

que é denominada **equação linear homogénea**.

Observação

1. Uma equação linear não envolve produto de variáveis, potências de variáveis (excepto a potência de expoente 1) nem variáveis como argumento de funções.

   As equações seguintes não são equações lineares:

$$\begin{array}{l} x + \cos y - 2\ arcsen\ z = 0; \\ xy - 3z = 5; \\ x^2 = 3; \\ \sqrt{x} + 4y = 2. \end{array}$$

   As equações seguintes são equações lineares:

$$\begin{array}{l} 5x + 2y = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{array}$$

2. As variáveis de uma equação linear são normalmente designadas pelas letras pequenas x, y, z, w, com ou sem índices.

3. Muitas vezes a equação linear nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

   pode aparecer com outro aspecto. Por exemplo,

$$a_1x_1 - b = -a_2x_2 - \ldots - a_nx_n$$

   ou

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - b = 0$$

   ou ... .

Podemos agora definir sistema de equações lineares.

Definição 1.2 *A uma colecção finita de equações lineares chama-se* **sistema de equações lineares**, *ou simplesmente* **sistema**. *As variáveis do sistema de equações lineares designam-se por* **incógnitas**.

Um sistema de m equações lineares a n incógnitas, $x_1, x_2, ..., x_n$, pode escrever-se na forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

em que o coeficiente a_{ij} está associado à i-ésima equação do sistema,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

e à j-ésima incógnita do sistema, x_j.

As constantes $b_1, b_2, ..., b_m$ *designam-se por* **termos independentes do sistema**.

Se no sistema (1.1) *tivermos* $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$*, dizemos que o sistema é* **homogéneo**.

Exemplo 1.3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

é um sistema de 2 equações lineares a 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3*. Este sistema não é um sistema homogéneo, pois a equação* $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ *não é uma equação linear homogénea.*

1.2 Solução e Conjunto-Solução de um Sistema

Depois da definição de sistema de equações lineares, é importante sabermos identificar uma solução de um sistema e como classificar um sistema consoante o número de soluções do mesmo.

Definição 1.4 *Uma solução de um sistema de equações lineares nas incógnitas* $x_1, x_2, ..., x_n$ *é uma sequência de n números* $s_1, s_2, ..., s_n$ *tais que, substituindo em cada equação* $x_1, x_2, ..., x_n$ *por* $s_1, s_2, ..., s_n$*, respectivamente, tornam cada equação do sistema numa proposição verdadeira.*

Observação A solução nula é solução de qualquer sistema homogéneo.

Exemplo 1.5 *Usando o sistema do* Exemplo 1.3*,*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

temos que

$$x_1 = 0, \ x_2 = 1, \ x_3 = 1$$

é uma solução do sistema, pois, $0 + 1 + 1 = 2$*,* $0 - 1 + 1 = 0$ *(substituição das incógnitas pelos números), mas,*

$$x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$$

não é solução do sistema, pois, $1 + 0 + 1 = 2$ *mas* $1 - 0 + 1 \neq 0$.

Definição 1.6 *O conjunto formado por todas as soluções de um sistema chama-se* **conjunto-solução**.

Considerando um sistema de equações lineares teremos 3 hipóteses para o seu conjunto-solução:

1. Se o sistema não tiver soluções, dizemos que o sistema é **impossível**. Neste caso, o conjunto-solução é vazio.

2. Se o sistema tiver uma, e uma só solução, dizemos que o sistema é **possível e determinado**. Neste caso, o conjunto-solução é constituído pela única solução do sistema.

3. Se o sistema tiver mais do que uma solução, dizemos que o sistema é **possível e indeterminado**.

1.3 Interpretação Geométrica do Conjunto-Solução de um Sistema

Se expressarmos uma solução $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,..., $x_n = s_n$ do sistema (1.1), como o n-uplo ordenado $(s_1, s_2, ..., s_n)$ (por exemplo, a solução do sistema (1.2), atrás referida, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, pode ser expressa pelo terno $(0, 1, 1)$), podemos pensar nas soluções do sistema (1.1) como pontos de $\mathbb{R}^n$, abrindo a possibilidade a uma interpretação geométrica do conjunto-solução do sistema.

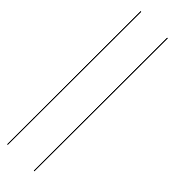
A intersecção de 2 rectas em $\mathbb{R}^2$ dá origem a um sistema de 2 equações lineares a 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

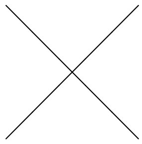
Cada uma destas 2 equações lineares representa uma recta do plano Oxy e, portanto, cada solução deste sistema corresponde a um ponto de intersecção destas rectas.

Assim, existem 3 possibilidades para o conjunto-solução deste sistema:

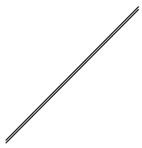
1. As rectas podem ser paralelas e distintas, sendo o sistema impossível (sem solução).



2. As rectas podem ser concorrentes (intersectam-se somente num ponto), sendo o sistema possível e determinado.



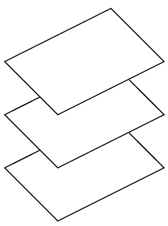
3. As rectas podem ser coincidentes e, neste caso, o sistema é possível e indeterminado (as soluções são todos os pontos da recta comum).



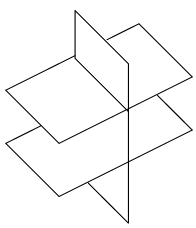
Se pensarmos na intersecção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$, teremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

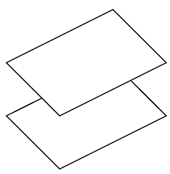
Como podemos ver existem 3 possibilidades para o conjunto-solução deste sistema: nenhuma solução, uma única solução ou uma infinidade de soluções.



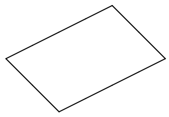
nenhuma solução,
3 planos paralelos



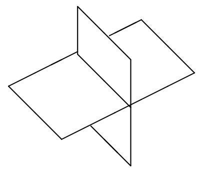
nenhuma solução,
2 planos paralelos



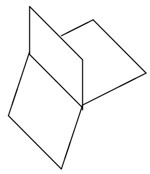
nenhuma solução,
2 planos coincidentes
paralelos ao outro



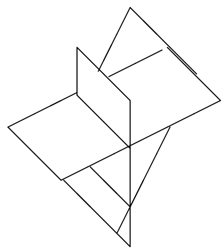
uma infinidade de soluções,
3 planos coincidentes,
a intersecção é um plano



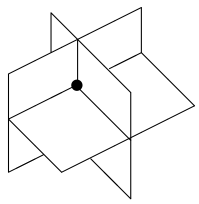
uma infinidade de soluções,
2 planos coincidentes
a intersecção é uma recta



uma infinidade de soluções,
a intersecção é uma recta



nenhuma solução



uma solução,
a intersecção é um ponto

1.4 Sistemas e Matrizes

Atendendo ao tamanho do sistema, é muitas vezes dificil a sua resolução e necessitamos de recorrer ao auxilio do computador. Para conseguirmos descrever e usar um processo para contornar esta dificuldade, teremos primeiro de conhecer conceitos que serão descritos nesta secção. O sistema (1.1) de m equações lineares a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

pode escrever-se como um quadro com $m \times (n+1)$ números, dispostos por m linhas e $n+1$ colunas, da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

que se designa por **matriz ampliada** do sistema e é denotada por $[A|B]$.

Observação Em Matemática chama-se **matriz** a qualquer quadro de números deste tipo.

A **matriz simples** do sistema é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

a **matriz dos termos independentes** é a matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

e a **matriz das incógnitas** do sistema é a matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.7 1. *O sistema* $\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ x + 2y = \frac{1}{3} \end{cases}$ *tem associadas as matrizes:*

- *simples do sistema* $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

- *dos termos independentes* $B = \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

- *das incógnitas* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

- *ampliada do sistema* $[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$.

2. *A matriz* $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ *é a matriz ampliada do sistema* $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ -x = 2 \\ 3y = 6 \end{cases}$

Definição 1.8 *Se uma linha, de uma matriz, não é toda nula, chamamos* **pivot** *ao elemento não nulo, dessa linha, mais à esquerda.*

Exemplo 1.9 *Na matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$*, o número* 1 *é o pivot da primeira linha.*

O número 5 *é o pivot da segunda linha e o número* 3 *é o pivot da terceira linha.*

Definição 1.10 *Dizemos que uma matriz está em* **forma de escada***, abreviadamente* **f.e.***, se verificar as* 2 *condições seguintes:*

1. *Se houver uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;*
2. *Em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.*

Exemplo 1.11 *As seguintes matrizes estão em forma de escada*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As seguintes matrizes não estão em forma de escada

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.12 *Dizemos que uma matriz está em* **forma de escada reduzida***, abreviadamente* **f.e.r.***, se estiver em forma de escada com cada pivot igual a 1 e os restantes elementos de cada coluna, a que pertença um pivot, iguais a zero.*

Exemplo 1.13 *As seguintes matrizes estão em forma de escada reduzida*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As seguintes matrizes não estão em forma de escada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.5 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere as seguintes equações, nas variáveis x, y, z:

$$\begin{array}{ll} E_1: & \frac{1}{2}x + 3y = 5z + 4 \\ E_2: & cos(\pi) - x + z = y \\ E_3: & (x+1)(y-4) = 0 \\ E_4: & sen(\pi)(x^2 - 3y) + 5z = 6. \end{array}$$

Quais as equações que são lineares e quais é que não o são?

$\boxed{\text{A}}$ E_1, E_2 são equações lineares e E_3, E_4 não são equações lineares.

$\boxed{\text{B}}$ E_1, E_2, E_3, E_4 são equações lineares.

$\boxed{\text{C}}$ E_1, E_2, E_4 são equações lineares e E_3 não é equação linear.

$\boxed{\text{D}}$ E_1 é equação linear e E_2, E_3, E_4 não são equações lineares.

2. Considere as seguintes equações, nas variáveis x, y, z:

$$\begin{array}{ll} E_1: & x + 3y - 5z = 0 \\ E_2: & y - 3x = 6z \\ E_3: & x + y + z + 1 = 0 \\ E_4: & -3x + z - cos(\pi) = y + 1. \end{array}$$

Quais as equações que são lineares homogéneas e quais é que não o são?

$\boxed{\text{A}}$ E_1, E_2 são equações lineares homogéneas e E_3, E_4 não são equações lineares homogéneas.

$\boxed{\text{B}}$ E_1, E_2, E_3, E_4 são equações lineares homogéneas.

$\boxed{\text{C}}$ E_1, E_2, E_4 são equações lineares homogéneas e E_3 não é equação linear homogénea.

$\boxed{\text{D}}$ E_1 é equação linear homogénea e E_2, E_3, E_4 não são equações lineares homogéneas.

3. Considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 4x = 8z. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $x = 1,\ y = -5,\ z = 2$ é solução do sistema.

$\boxed{\text{B}}$ $x = 2,\ y = -5,\ z = 1$ é solução do sistema.

$\boxed{\text{C}}$ $x = 2,\ y = 1,\ z = -5$ é solução do sistema.

$\boxed{\text{D}}$ $x = 1,\ y = 2,\ z = -5$ é solução do sistema.

4. A intersecção de dois planos em $\mathbb{R}^3$ nunca pode ser:

   $\boxed{\text{A}}$ uma recta.

   $\boxed{\text{B}}$ um plano.

   $\boxed{\text{C}}$ um ponto.

   $\boxed{\text{D}}$ o conjunto vazio.

5. A matriz simples do sistema de equações lineares $\begin{cases} x+z+2w=3 \\ y-z-w=2 \\ x+y+w=5 \end{cases}$, nas variáveis x, y, z, w é:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{D}}$ nenhuma das matrizes anteriores.

6. Considere os seguintes sistemas de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S_1) : \begin{cases} 3x+5y-6=0 \\ x+z=3 \\ x=5 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x+5y=6 \\ x+z-1=cos(\pi) \\ x-3=-2 \end{cases}$$

   <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ (S_1) e (S_2) têm a mesma matriz ampliada.

   $\boxed{\text{B}}$ (S_1) e (S_2) têm a mesma matriz simples, mas têm diferentes matrizes dos termos independentes.

   $\boxed{\text{C}}$ (S_1) e (S_2) têm a mesma matriz dos termos independentes, mas têm diferentes matrizes simples.

   $\boxed{\text{D}}$ (S_1) e (S_2) não têm a mesma matriz dos termos independentes, nem a mesma matriz simples.

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ O número 5 é pivot da segunda linha de A.

   $\boxed{\text{B}}$ O pivot da segunda linha de A está mais à direita do que o pivot da primeira linha de A.

   $\boxed{\text{C}}$ A é a matriz ampliada do sistema de equações lineares $\begin{cases} z=2 \\ 3x=5 \\ 6y+7z-8=0 \end{cases}$.

   $\boxed{\text{D}}$ O número zero é pivot da primeira linha de A.

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quais são as matrizes que estão em forma de escada e quais é que não estão?

[A] A, B e C não estão em forma de escada.

[B] A e C estão em forma de escada e B não está em forma de escada.

[C] A está em forma de escada e B e C não estão em forma de escada.

[D] A, B e C estão em forma de escada.

9. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quais são as matrizes que estão em forma de escada reduzida e quais é que não estão?

[A] A, B e C não estão em forma de escada reduzida.

[B] A e C estão em forma de escada reduzida e B não está em forma de escada reduzida.

[C] C está em forma de escada reduzida e A e B não estão em forma de escada reduzida.

[D] A, B e C estão em forma de escada reduzida.

1.6 Método de Eliminação de Gauss

Nesta secção iremos descrever um algoritmo para resolver um sistema de equações lineares: o método de eliminação de Gauss. Vimos que podemos associar a um sistema diversas matrizes, entre elas a matriz ampliada do sistema. Também é fácil de comprovar que o sistema que tem como matriz ampliada uma matriz em forma de escada é um sistema de fácil resolução.

Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, é uma matriz em forma de escada e é a matriz ampliada do sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y = 7 \\ 2z = 8 \end{cases}$. Ora este sistema é fácil de resolver e tem como conjunto-solução, $\{(-9, 7, 4)\}$.

O objectivo do algoritmo é obter a partir da matriz ampliada do sistema, uma sua forma de escada. Para isso necessitamos de efectuar certas operações nas linhas da matriz, operações estas que não alterem as soluções do sistema.

Há três tipos de operações possíveis:

1. Multiplicar uma linha por uma constante não nula ;

2. trocar duas linhas;
3. somar um múltiplo de uma linha a outra linha.

Estas operações nas linhas da matriz são designadas por **transformações elementares nas linhas**. Demonstra-se que nenhuma delas altera o conjunto-solução do sistema inicial, pelo que utilizando estas três transformações elementares é possível obter uma matriz em forma de escada, da matriz inicial.

Vejamos um exemplo de como se processa o método de eliminação de Gauss.

Exemplo 1.14 *Consideremos o sistema nas variáveis* $x,\ y,\ z$

$$\begin{cases} y+2z=\frac{5}{2} \\ 2x+z=2 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

A matriz ampliada deste sistema é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esta matriz não está em forma de escada. Vamos utilizar as transformações elementares nas linhas da matriz por forma a obtermos uma matriz em forma de escada. Repare que na primeira coluna da matriz, temos na primeira linha (posição $(1,1)$ *da matriz)* (**sempre que escrevemos posição** (i,j)**, o** i **designa a linha da matriz (numeração de cima para baixo) e o** j **a coluna (numeração da esquerda para a direita)**) *um zero e há elementos não nulos nesta coluna. Portanto, temos que colocar um elemento diferente de zero na posição* $(1,1)$*. Para isso vamos utilizar a transformação elementar que troca duas linhas. Troquemos a primeira linha da matriz com a sua terceira linha. Obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Nesta matriz existem, na primeira coluna, além do elemento da posição $(1,1)$*, outros elementos não nulos. O passo seguinte, para chegarmos a uma matriz em forma de escada, é anular estes outros elementos da primeira coluna, usando sempre transformações elementares. Como temos o número* 2 *na posição* $(2,1)$*, para o alterarmos para zero, teremos de somar à segunda linha desta matriz a primeira linha depois de multiplicada por* -2 (**nunca se esqueça que é toda a linha que vai alterar, não é só alterado um elemento da linha**)*. Obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Esta matriz tem a primeira coluna nas condições de uma matriz em forma de escada. Vamos esquecer a primeira linha e a primeira coluna desta matriz e ficamos com a matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Façamos o mesmo raciocínio com esta matriz. Temos agora na segunda linha e segunda coluna um elemento diferente de zero. Na segunda coluna da matriz há outros elementos não nulos. Vamos anular o número 1 *que está na posição* $(3, 2)$ *usando o número* 2 *da posição* $(2, 2)$ *e uma transformação elementar. Ou seja, vamos somar à terceira linha a segunda multiplicada por* $-\frac{1}{2}$*. Obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{cc|c} & & \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Se colocarmos os elementos que foram omitidos, temos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

que está em forma de escada.

Até aqui foi utilizado o método de eliminação de Gauss. Se continuarmos o processo, mas agora da última linha da matriz para a primeira, obtemos uma matriz em forma de escada reduzida. Este processo é conhecido por **método de eliminação de Gauss-Jordan**.

Vejamos este método com esta matriz.

O pivot da terceira linha não é o número um. Para o transformarmos em um, com uma transformação elementar, vamos multiplicar a terceira linha por $\frac{2}{5}$*. Obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A terceira coluna, além do pivot da terceira linha, tem outros elementos não nulos. Temos que transformá-los em zeros. Se somarmos à segunda linha a terceira, obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Se somarmos à primeira linha a terceira multiplicada por -1*, obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

A terceira coluna está nas condições de matriz em forma de escada reduzida. Passemos à segunda coluna e façamos o mesmo processo. O pivot desta coluna está na segunda linha.

Vamos multiplicar a segunda linha por $\frac{1}{2}$. *Obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Se somarmos à primeira linha a segunda, obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Esta matriz está em forma de escada reduzida e corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

A solução é $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 1$, *ou em termos de conjunto-solução*

$$\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}.$$

Para simplificar a escrita, usaremos as seguintes notações para as três transformações elementares nas linhas:

1. $l_i \to al_i$ para designar que multiplicámos a linha i pela constante, não nula, a.
2. $l_i \leftrightarrow l_j$ para designar que trocámos a linha i pela linha j.
3. $l_i \to (l_i + bl_j)$ para designar que somámos à linha i, a linha j depois de multiplicada por b.

Exemplo 1.15 *Vamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} x & -y & +z & = 1 \\ 2x & & +z & = 2 \\ 3x & -y & +2z & = 3. \end{cases} \tag{1.3}$$

A matriz ampliada do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{l_2 \to (l_2 - 2l_1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 - 3l_1)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 - l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{l_2 \to \frac{1}{2}l_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{l_1 \to (l_1 + l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e o sistema que corresponde a esta última matriz ampliada é

$$\begin{cases} x \quad +\frac{1}{2}z = 1 \\ \quad y -\frac{1}{2}z = 0 \\ \qquad 0 \quad = 0. \end{cases}$$

Porque x e y correspondem aos pivots da 1^{a} e 2^{a} linhas da matriz ampliada, dizemos que estas variáveis são **líderes**. *As outras variáveis (que neste caso é unicamente o z) dizem-se* **livres**.

Resolvendo o sistema em ordem às variáveis líderes obtemos

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}z \\ y = \quad \frac{1}{2}z. \end{cases}$$

Pelo que o conjunto-solução é

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = 1 - \frac{1}{2}z, \; y = \frac{1}{2}z\right\} = \left\{\left(1 - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Vejamos mais alguns exemplos de como determinar o conjunto-solução de um sistema.

Exemplo 1.16 *Consideremos 3 planos em $\mathbb{R}^3$ de equações*

$$3x + 3y + z = 4; \qquad x + 2y - z = 0; \qquad 2x + y + z = 3,$$

e determinemos a sua intersecção.

O sistema formado pelas 3 equações é

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 4 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3. \end{cases}$$

A matriz ampliada deste sistema é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{l_2 \to (l_2 - \frac{1}{3}l_1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 - \frac{2}{3}l_1)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 + l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{l_3 \to -l_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_2 \to (l_2 + \frac{4}{3}l_3)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to (l_1 - l_3)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to (l_1 - 3l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to \frac{1}{3}l_1}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Esta matriz corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1. \end{cases}$$

Pelo que o conjunto-solução é

$$\{(1, 0, 1)\}.$$

Ou seja, a intersecção dos 3 planos em $\mathbb{R}^3$ *é o ponto* $(1, 0, 1)$.

1.7 Aplicação dos Sistemas de Equações Lineares

Ao longo desta secção veremos um exemplo de aplicação dos sistemas de equações lineares aos problemas da vida quotidiana. Outro exemplo pode ser consultado no apêndice "Outra Aplicação dos Sistemas: Análise de Redes".

1.7.1 Cores dos Ecrãs de Televisão

As cores dos ecrãs de televisão são baseadas no **modelo** de cores **RGB** (red, green and blue). Neste modelo, as cores são criadas a partir das três cores: vermelho, verde e azul. Se identificarmos estas cores com os vectores de $\mathbb{R}^3$

$R = (1,0,0)$ (vermelho), $G = (0,1,0)$ (verde), $B = (0,0,1)$ (azul)
e adicionarmos estes vectores depois de cada um deles ter sido multiplicado por um escalar (um número real) entre 0 e 1, inclusivé, (estes escalares representam a percentagem de cada cor na mistura) obtemos todas as outras cores.

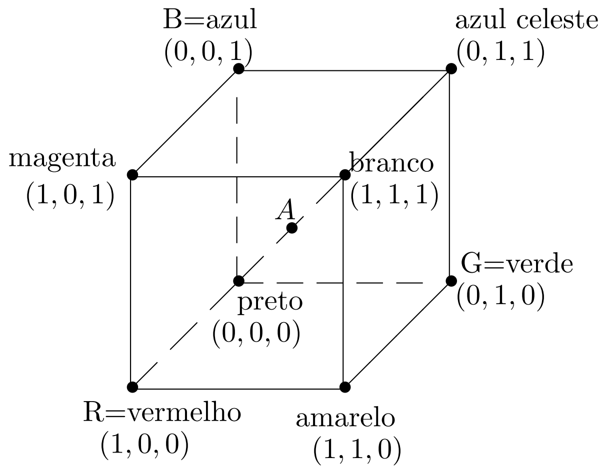
Definição 1.17 *Um vector w de $\mathbb{R}^n$ é* **combinação linear** *dos vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ de $\mathbb{R}^n$ se w pode ser expresso na forma*

$$w = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_pv_p$$

em que $c_1, c_2, ..., c_p \in \mathbb{R}$ e são denominados **coeficientes da combinação linear**.

Portanto, o que dissemos anteriormente, é que cada vector cor pode ser expresso como combinação linear de R,G,B, em que os coeficientes da combinação linear são números reais entre 0 e 1.

O conjunto de todas as cores pode ser representado pelo cubo:



Ao longo da diagonal entre o preto e o branco estão todas as tonalidades de cinzento. Se A (cor cinzenta) for o vector cor $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, ele escreve-se como combinação linear dos vectores cores R,G,B da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1).$$

Vejamos se é possível escrever A como combinação linear dos vectores cores R,B e amarelo. Neste caso, o que pretendemos é encontrar coeficientes x, y, z tais que

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = x(1,0,0) + y(0,0,1) + z(1,1,0).$$

Atendendo ao produto de um escalar por um vector, soma de vectores e igualdade de vectores temos

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (x + z, z, y).$$

Donde obtemos o sistema

$$\begin{cases} x \quad +z = \frac{1}{2} \\ \qquad z = \frac{1}{2} \\ \quad y \qquad = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que tem a solução $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$. Assim a cor cinzenta, A, obtém-se à custa do amarelo e do azul sem necessitarmos do vermelho,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(0,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0).$$

1.8 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$. Se lhe efectuarmos a transformação elementar $l_2 \to (l_2 - 2l_1)$, obtemos a matriz:

   $\boxed{\text{A}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \end{array}\right]$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -6 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$.

2. Considere a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right]$. Para a colocarmos em forma de escada, segundo o método de eliminação de Gauss, primeiro efectuamos a transformação:

   $\boxed{\text{A}}$ $l_2 \to (l_2 - 2l_1)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $l_3 \to (l_3 - 3l_1)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $l_1 \leftrightarrow l_3$.

   $\boxed{\text{D}}$ $l_1 \leftrightarrow l_2$.

3. Considere a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$. Para a colocarmos em forma de escada, segundo o método de eliminação de Gauss, primeiro efectuamos a transformação:

   $\boxed{\text{A}}$ $l_2 \to (l_2 - l_1)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $l_3 \to (l_3 - l_1)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $l_3 \to (l_3 - l_2)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $l_2 \to (l_2 - l_3)$.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Uma matriz em forma de escada reduzida obtida de A é:

   $\boxed{\text{A}}$ a própria matriz A.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{D}}$ nenhuma das matrizes anteriores.

5. Considere a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$. Para a colocarmos em forma de escada reduzida, segundo o método de eliminação de Gauss-Jordan, primeiro efectuamos a transformação:

   $\boxed{\text{A}}$ $l_2 \to (l_2 - 4l_1)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $l_1 \to (l_1 - l_2)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $l_3 \to (l_3 - l_1)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $l_2 \to (l_2 - 4l_3)$.

6. Considere a matriz $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$. Para a colocarmos em forma de escada reduzida, segundo o método de eliminação de Gauss-Jordan, primeiro efectuamos a transformação:

   $\boxed{\text{A}}$ $l_3 \to 3l_3$.

   $\boxed{\text{B}}$ $l_3 \to \frac{1}{3}l_3$.

   $\boxed{\text{C}}$ $l_3 \to -3l_3$.

   $\boxed{\text{D}}$ $l_3 \to -\frac{1}{3}l_3$.

7. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + z + 2w = 3 \\ y - z - w = 2 \\ x + y + w = 5 \end{cases}$, nas variáveis x, y, z, w. O conjunto-solução deste sistema é:

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(3, 2, 0, 0)\}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(3, 2, 0, 0), (-1, 0, 0, 2)\}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(3 + z + 2w, 2 - z - w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(3 - z - 2w, 2 + z + w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}$.

8. O conjunto-solução do sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, w, sobre $\mathbb{R}$, que tem como matriz ampliada $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, é:

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(-3 - w, y, -2 - w, w) : \ y, w \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\{(-3-w, 0, -2-w, w) : \ w \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\{(3-w, 0, 2-w, w) : \ w \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\{(3-w, y, 2-w, w) : \ y, w \in \mathbb{R}\}$.

9. Sendo α, β, γ reais tais que

$$\alpha(1,-1,3,2) + \beta(0,1,4,5) + \gamma(-1,1,2,2) = (2,0,9,10)$$

então:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = -1, \ \beta = 2, \ \gamma = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 2, \ \beta = -1, \ \gamma = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 1, \ \beta = 2, \ \gamma = -1$.

$\boxed{\text{D}}$ $\alpha = -1, \ \beta = 1, \ \gamma = 2$.

10. Considere os seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1,0,1), \qquad v = (0,2,2) \qquad w = (2,-2,0).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $w = 2u + v$.

$\boxed{\text{B}}$ $w = 2u - 2v$.

$\boxed{\text{C}}$ $u = \frac{1}{2}(v + w)$.

$\boxed{\text{D}}$ $u = \frac{1}{2}(v - w)$.

11. Sejam u, v, w, três vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$, tais que $u = 3v - w$ e v não é combinação linear de w. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $u = w$.

$\boxed{\text{B}}$ u é combinação linear de w.

$\boxed{\text{C}}$ o vector nulo de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear de u.

$\boxed{\text{D}}$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$, não nulo, tal que $w = \alpha v$.

1.9 Característica de uma Matriz

Quando resolvemos um sistema usando a sua matriz ampliada, o que fazemos é modificar a matriz inicial através de transformações elementares nas linhas da matriz, até obtermos uma matriz em forma de escada ou em forma de escada reduzida. Estas matrizes que se obtém, permitem-nos determinar mais facilmente o conjunto-solução do sistema.

Ou seja,

1. Se aplicarmos o método de eliminação de Gauss a uma determinada matriz, obtemos uma sua forma de escada. Se além deste, utilizarmos o método de eliminação de Gauss-Jordan obtemos a sua forma de escada reduzida.

2. Uma matriz pode dar origem a diversas suas formas de escada, mas só dá origem a uma sua forma de escada reduzida.

Proposição 1.18 *Seja C uma matriz. Qualquer matriz em forma de escada obtida de C, tem o mesmo número de linhas não nulas.*

Definição 1.19 *Seja C uma matriz. Ao número de linhas não nulas de qualquer sua forma de escada chama-se* **característica de C** *e denota-se por* $\mathbf{r(C)}$.

Exemplo 1.20 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ & 2y & +z & = & 0 \\ x & +3y & & = & 3. \end{cases}$$

Vejamos as características das matrizes simples e ampliada do sistema.

Ora, a matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 - l_1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 - l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, $r([A|B]) = 3$ (*número de linhas não nulas, quando a matriz está em forma de escada*) *e* $r(A) = 2$.

Observação 1. Se C é uma matriz com m linhas, da definição vem que $r(C) \leq m$.

2. Se A é a matriz simples de um dado sistema e $[A|B]$ é a matriz ampliada, então $r(A) \leq r([A|B])$.

3. Se C é uma matriz com n colunas, porque numa forma de escada de C não podem existir dois pivots na mesma coluna, então $r(C) \leq n$ (o número de linhas não nulas é o número de pivots, quando a matriz está em forma de escada).

1.10 Discussão de um Sistema

Muitas vezes, dada a complexidade de certos sistemas ou porque podem tirar-se conclusões sem a solução do sistema, interessa saber se o sistema é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível. Uma forma de fazer este estudo é através da comparação das características das matrizes ampliada e simples do sistema, e do número de incógnitas. A este estudo chama-se **discussão do sistema**.

Teorema 1.21 *Dado um sistema com m equações a n incógnitas e sendo A a matriz simples do sistema e $[A|B]$ a matriz ampliada, então:*

1. *Se $r(A) < r([A|B])$, o sistema é impossível*

2. *Se $r(A) = r([A|B]) = n$, o sistema é possível e determinado*

3. *Se* $r(A) = r([A|B]) < n$, *o sistema é possível e indeterminado, sendo* $n - r(A)$ *o número de variáveis livres do sistema a que se chama* **grau de indeterminação do sistema**.

Demonstração Seja $[A'|B']$ uma forma de escada da matriz ampliada $[A|B]$. Então, A' está em forma de escada e é obtida a partir de A. Pela definição, $r([A|B]) = r([A'|B'])$ e $r(A) = r(A')$.

1. Se $r(A) < r([A|B])$, então $r(A') < r([A'|B'])$. Consequentemente, o sistema a que corresponde a matriz ampliada $[A'|B']$ terá, pelo menos, uma equação do tipo $0 = b'_j$ com $b'_j \neq 0$ (repare-se no exemplo anterior) e o sistema é impossível.

2. Se $r(A) = r([A|B]) = n$, então $r(A') = r([A'|B']) = n$. Neste caso, o sistema a que corresponde a matriz ampliada $[A'|B']$, pensando que $[A'|B']$ é a forma de escada reduzida de $[A|B]$, é

$$\begin{cases} x_1 & & & = b'_1 \\ & x_2 & & = b'_2 \\ & & & \vdots \\ & & x_n & = b'_n \end{cases}$$

(repare-se no Exemplo 1.14). Ou seja, o sistema é possível e determinado.

3. Sendo $[A'|B']$ a forma de escada reduzida de $[A|B]$, se $r(A) = r([A|B]) = s < n$, então o sistema a que corresponde a matriz ampliada $[A'|B']$, terá s variáveis líderes e portanto $n - s$ variáveis livres e será do tipo

$$\begin{cases} x_{i_1} & & & +\sum(\ ) = b'_1 \\ & x_{i_2} & & +\sum(\ ) = b'_2 \\ & & & \vdots \\ & & x_{i_s} & +\sum(\ ) = b'_n \end{cases}$$

em que $\sum(\ )$ designa, em cada equação, a soma que envolve as variáveis livres. Como neste caso, $s < n$, então $n - s \geq 1$, ou seja, o sistema é possível e indeterminado (repare-se no Exemplo 1.15). □

Porque, num sistema homogéneo a matriz dos termos independentes é toda nula e transformações elementares nas linhas não alteram uma coluna nula, temos sempre $r(A) = r([A|B])$.

Corolário 1.22 *Dado um sistema homogéneo com* m *equações a* n *incógnitas e sendo* A *a matriz simples do sistema, então:*

1. *Se* $r(A) = n$, *o sistema é possível e determinado*

2. *Se* $r(A) < n$, *o sistema é possível e indeterminado, sendo* $n - r(A)$ *o número de variáveis livres do sistema a que se chama* **grau de indeterminação do sistema**.

Exemplo 1.23 *Façamos a discussão do sistema nas incógnitas x, y, z e nos parâmetros a e b.*

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ ay + z = 2 \\ (a-1)z = b. \end{cases}$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & b \end{array}\right].$$

Vamos utilizar o Teorema *anterior para sabermos quando é que o sistema está em cada um dos casos:*

Olhando para a matriz, os elementos que alteram a matriz estar em forma de escada são $a = 0$ e $a = 1$. São estes que vão ser estudados.

- *Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$ então, a matriz $[A|B]$ está em forma de escada, pelo que $r(A) = 3 = r([A|B])$ =número de incógnitas. Pelo* Teorema 1.21, *nestas condições o sistema é possível e determinado.*

- *Se $a = 0$, a matriz ampliada é*

  $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{array}\right]$ *que não está em forma de escada.*

  Calculemos a sua característica

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 + l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right].$$

  Se $b \neq -2$, $r([A|B]) = 3$.

  Se $b = -2$, $r([A|B]) = 2$.

  Como $r(A) = 2$, temos :

  Se $a = 0$, $b \neq -2$, $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$ e o sistema é impossível.

  Se $a = 0$, $b = -2$, $r(A) = 2 = r([A|B]) < 3$ =número de incógnitas e o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r(A) = 3 - 2 = 1$.

- *Se $a = 1$, a matriz ampliada é*

  $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right].$

  Pelo que, se $b \neq 0$, $r([A|B]) = 3$ e se $b = 0$, $r([A|B]) = 2$.

  Porque $r(A) = 2$, então

  Se $a = 1$, $b \neq 0$, $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$ e o sistema é impossível,

  Se $a = 1$, $b = 0$, $r(A) = 2 = r([A|B]) < 3$ =número de incógnitas e o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - r(A) = 3 - 2 = 1$.

Resumindo, o sistema é

- *possível e determinado se* ($a \neq 0$ *e* $a \neq 1$),
- *possível e indeterminado se* ($a = 0$ *e* $b = -2$) *ou* ($a = 1$ *e* $b = 0$), *em qualquer dos casos com grau de indeterminação* 1,
- *impossível se* ($a = 0$ *e* $b \neq -2$) *ou* ($a = 1$ *e* $b \neq 0$).

Exemplo 1.24 *Determinemos para que valores de* a *e* b, *as duas rectas em* $\mathbb{R}^2$, *cujas equações são*

$$3x + 3y = b \qquad e \qquad x + ay = \frac{1}{3},$$

coincidem.

Como vimos anteriormente, as rectas são coincidentes se o sistema, formado pelas suas equações, for possível e indeterminado. Vamos discutir o sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y = b \\ x + ay = \frac{1}{3} \end{cases},$$

utilizando o método de eliminação de Gauss. A matriz ampliada deste sistema é a matriz

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & b \\ 1 & a & \frac{1}{3} \end{array}\right] \underset{l_2 \to (l_2 - \frac{1}{3}l_1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & b \\ 0 & (a-1) & \frac{1}{3} - \frac{b}{3} \end{array}\right]$$

- *Se* $a \neq 1$ *então, a matriz* $[A|B]$ *está em forma de escada, pelo que* $r(A) = 2 = r([A|B])$ =*número de incógnitas. Pelo* Teorema 1.21, *nestas condições o sistema é possível e determinado.*
- *Se* $a = 1$ *e* $b \neq 1$, *então, a matriz* $[A|B]$ *está em forma de escada, pelo que* $r(A) = 1 =< ([A|B])$. *Pelo* Teorema 1.21, *nestas condições o sistema é impossível.*
- *Se* $a = 1$ *e* $b = 1$, *então, a matriz* $[A|B]$ *está em forma de escada, pelo que* $r(A) = 1 = r([A|B]) < 2$ =*número de incógnitas. Pelo* Teorema 1.21, *nestas condições o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual ao número de incógnitas*$-r(A) = 1$.

Portanto, as rectas são coincidentes se $a = b = 1$.
Vejamos como é o conjunto-solução do sistema neste caso. Se $a = b = 1$, *o sistema é*

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Então, $x = \frac{1}{3} - y$.

Assim, o conjunto-solução do sistema é

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \frac{1}{3} - y\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3} - y, y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Para terminar este capítulo, vejamos como se resolve um exercício.

Exemplo 1.25 *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas variáveis reais x, y, z e w:*

$$\begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ x + y + z + (\alpha + 2)w = 0 \\ 2x + y + (\alpha + 2)z + (\alpha + 4)w = 0 \\ 4x + \beta y + 4z + 8w = \beta. \end{cases}$$

a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.
b) Para $\alpha = \beta = 0$ indique o conjunto-solução do sistema.

Resolução
a) A matriz ampliada deste sistema é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+2 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha+2 & \alpha+4 & 0 \\ 4 & \beta & 4 & 8 & \beta \end{array}\right].$$

Vamos colocar esta matriz, o mais possível, em forma de escada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha+2 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha+2 & \alpha+4 & 0 \\ 4 & \beta & 4 & 8 & \beta \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ l_2 \to (l_2 - l_1) \\ l_3 \to (l_3 - 2l_1) \\ l_4 \to (l_4 - 4l_1) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & \beta \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ l_3 \to (l_3 - l_2) \\ l_4 \to (l_4 - \beta l_2) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \beta \end{array}\right].$$

Os valores que causarão problema são $\alpha = 0$ e $-\alpha\beta = 0$. Ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Vamos utilizar o Teorema *dado, para sabermos quando é que o sistema está em cada um dos casos:*

- *Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ então, a matriz $[A|B]$ ficou em forma de escada, pelo que $r(A) = 4 = r([A|B])$ =número de incógnitas. Pelo* Teorema, *nestas condições o sistema é possível e determinado.*

- *Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, a matriz ampliada fica*

  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right]$$ *que não está em forma de escada.*

  Calculemos a sua característica

  $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] \begin{array}{c} \longrightarrow \\ l_3 \leftrightarrow l_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Como $r(A) = 2 < r([A|B]) = 3$, o sistema é impossível.

- *Se* $\alpha = 0$ *e* $\beta = 0$, *a matriz ampliada fica*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&2&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$ *que está em forma de escada.*

Pelo que, $r([A|B]) = 2 = r(A) < 4 =$*número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação* $2 =$*número de incógnitas*$-r(A)$.

- *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $\beta = 0$, *a matriz ampliada fica*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&2&0\\ 0&1&0&\alpha&0\\ 0&0&\alpha&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$ *que está em forma de escada.*

Pelo que, $r([A|B]) = 3 = r(A) < 4 =$*número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação* $1 =$*número de incógnitas*$-r(A)$.

b) Pela alínea anterior, se $\alpha = 0$ *e* $\beta = 0$, *a matriz ampliada fica*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&2&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right]$$ *que está em forma de escada reduzida.*

Pelo que, em sistema temos

$$\begin{cases} x + z + 2w = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} x = -z - 2w \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução deste sistema é

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ x = -z - 2w, \ y = 0\} = \{(-z - 2w, 0, z, w) : \ z, w \in \mathbb{R}\}.$$

1.11 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. A matriz $\begin{bmatrix} 1&9&6&1\\ 1&1&-1&0\\ 0&8&7&1\\ 2&2&-2&0 \end{bmatrix}$ tem característica

$\boxed{\text{A}}$ 1.

$\boxed{\text{B}}$ 2.

$\boxed{\text{C}}$ 3.

$\boxed{\text{D}}$ 4.

2. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica

$\boxed{\text{A}}$ 1.

$\boxed{\text{B}}$ 2.

$\boxed{\text{C}}$ 3.

$\boxed{\text{D}}$ 4.

3. Considere o sistema nas incógnitas x, y e z e com os parâmetros α e β
$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ 2x + (\beta - 1)y + z = \alpha \\ 2x + y + \beta z = 0. \end{cases}$$
Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\beta = 1$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e determinado.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\beta = 2$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.

4. Considere o sistema nas incógnitas x, y e z e com os parâmetros α e β
$$\begin{cases} 2x + y - z = \alpha \\ 2x + (\beta - 1)y + z = \alpha \\ 2x + y + \beta z = 0. \end{cases}$$
Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\beta = -1$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\beta = -1$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e determinado.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\beta = 2$ e $\alpha \neq 0$ então o sistema é impossível.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.

5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se A é uma matriz com m linhas e n colunas, então $r(A) \leq m$.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é uma matriz com 1 linha e n colunas, então $r(A) = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é uma matriz com m linhas e n colunas, então $r(A) \leq n$.

$\boxed{\text{D}}$ Se A é uma matriz com m linhas e 1 coluna, então $r(A) < 2$.

6. Seja (S) um sistema de equações lineares em que a sua matriz simples, A, tem 3 linhas, 5 colunas e $r(A) = 3$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ O sistema (S) é possível e determinado.

$\boxed{\text{B}}$ O sistema (S) é impossível.

$\boxed{\text{C}}$ O sistema (S) é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{D}}$ O sistema (S) é possível e indeterminado, com grau de indeterminação 3.

1.12 Exercícios

1. Quais das equações seguintes são equações lineares em x, y e z?

   a) $x + \pi y + \sqrt[3]{2}z = e$.
   b) $x - y + 3z = sen\pi$.
   c) $x^2 + xy + z = 2$.
   d) $(cos\frac{\pi}{2})x - (sen(3\pi))y + z = 0$.
   e) $sen(y) + 2z = -x$.
   f) $ax + 6y - 3z = 9$, com $a \in \mathbb{R}$.

   Alguma das equações anteriores é equação homogénea? Em caso afirmativo, indique quais.

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2y - z = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}z = 3 \\ 3x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

   a) Qual o número de variáveis do sistema?
   b) Quantas equações tem o sistema?
   c) O sistema é homogéneo?
   d) $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$ é solução do sistema?
   e) $x = 2,\ y = 1,\ z = 2$ é solução do sistema?
   f) $x = \frac{2}{3},\ y = 1,\ z = 2$ é solução do sistema?
   g) Atendendo às soluções do sistema, classifique-o.

3. Um sistema de duas equações lineares, em três variáveis, pode representar que figuras geométricas do espaço $\mathbb{R}^3$?

4. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ x + y = 0 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

   Indique:

   a) a matriz ampliada do sistema.
   b) a matriz simples do sistema.
   c) a matriz das variáveis do sistema.
   d) a matriz dos termos independentes do sistema.

5. Considere a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Determine:

   a) um sistema em que D seja a sua matriz ampliada.
   b) um sistema em que D seja a sua matriz simples.
   c) o pivot da terceira linha de D.

d) o pivot da segunda linha de D.

6. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em forma de escada e quais são matrizes em forma de escada reduzida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Resolva os seguintes sistemas, pelo método de eliminação de Gauss-Jordan, apresentando para cada caso o conjunto-solução:

a) $\begin{cases} x + z = 1 \\ x + y = 3 \\ y + z = 2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -4x + 4y + 4z = 8 \\ 7x + y - 15z = -6 \\ -4x + 3y + z = 11. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y - 2z - w = 1 \\ 2x + y - z + 4w = -1 \\ -3x + 3z + 9w = -6. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 7y + 5z + 3w + 2u = 0 \\ z - w + u = 2 \\ x + 7y + 8w - 3u = 5 \\ 2x + 10z + 6w = 3. \end{cases}$

8. Resolva, geometricamente e analiticamente, os seguintes sistemas, nas incógnitas x_1, x_2, sobre $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$

9. a) Determine a, b e c valores reais, de forma a que os pontos $(x, y) = (0, 1)$, $(x, y) = (1, 3)$ e $(x, y) = (2, 1)$ verifiquem a relação

$$y = a + b.2^x + c.2^{2x},$$

estabelecida entre duas grandezas x e y.

b) Justifique que se a relação anterior é verificada pelos pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$, então a, b e c existem e são únicos.

10. No modelo de cores R, G, B, verifique se o vector de cor

    a) preto é combinação linear de G, B e azul celeste.
    b) branco é combinação linear de R e azul celeste.
    c) magenta é combinação linear de R, G e amarelo.
    d) magenta é combinação linear de azul, branco e azul celeste.
    e) magenta é combinação linear de R e B.

11. Sejam $u = (2, -1, 4, 5)$ e $v = (3, 0, 1, -2)$. Encontre escalares α e β tais que

$$\alpha u + \beta v = (4, 1, -2, -9).$$

12. Sejam $u = (2, 1, 0, 1, -1)$ e $v = (-2, 3, 1, 0, 2)$. Encontre escalares α e β tais que

$$\alpha u + \beta v + (8, -4, -2, 2, -6) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

13. Exprima cada um dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ e $w = (2, 1, 5)$

    a) $(7, -1, 13)$.
    b) $(3, 3, 2)$.
    c) $(0, 0, 0)$.
    d) $(5, 1, 12)$.

14. Considere os vectores $v_1 = (1, 1, 0, 3)$, $v_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$ de $\mathbb{R}^4$. Quais destes vectores se escrevem como combinação linear de v_1, v_2 e v_3?

    a) $(3, 0, 7, 6)$.
    b) $(2, 1, 2, 4)$.
    c) $(0, 0, 0, 0)$.
    d) $(-4, -4, 0, 12)$.

15. Considere os vectores $u = (2, 1, 2)$, $v = (1, 1, 1)$ e $w = (0, -1, 0)$ de $\mathbb{R}^3$. Quais destes vectores se escrevem como combinação linear de u, v, w?

    a) $(0, 0, 0)$.
    b) $(3, 5, 2)$.
    c) $(6, 9, 6)$.

16. Determine os valores da constante $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema seguinte, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$, tenha soluções não nulas:

$$\begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

17. Determine as características das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + y + cz = 1 \\ x + by + z = 1 \\ cx + y + az = 1. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema para $a = 0$, $b = 1$ e $c = 1$, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

b) Para $a = b = c = 1$, determine a característica da matriz simples e da matriz ampliada do sistema.

c) Para b qualquer, mostre que, quando $a = c$, o sistema nunca é determinado.

19. a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que o sistema seguinte seja possível:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = \alpha \\ 3x - y + 3z = 4 \\ 5x - 3y + 5z = 10. \end{cases}$$

b) Calcule a característica das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

onde α é o valor determinado em a).

20. Sem resolver o sistema seguinte, nas variáveis reais x, y, z e w,

$$\begin{cases} x + y - z + w = a \\ y + z - 2w = b \\ 2x + y + z = c \\ -x + 2y - 3w = d \end{cases}$$

prove que ele nunca pode ser determinado.

21. Sem efectuar cálculos, justifique quais dos seguintes sistemas têm mais do que uma solução:

a) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 2 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

22. Considere os seguintes sistemas de equações lineares, nas variáveis reais x, y e z:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+(b+1)z=3 \\ x+y+(a-1)z=a-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x+ay+bz=b \\ x-y+z=2 \\ x-ay+z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-by-az=-a \\ x-2y+2z=3 \\ x-by+2z=2 \end{cases}$.

Discuta os sistemas em função dos parâmetros reais a e b.

23. Para que valores reais a e b, as duas rectas do plano, de equações $-x+5y=a$ e $4x-20y=b$ são paralelas?

24. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas variáveis reais x, y, z e w:

$$\begin{cases} x+z+2w=\alpha \\ x+y+z+(\alpha+2)w=3+\alpha \\ 2x+y+(\alpha+2)z+(\alpha+4)w=0 \\ 4x+\beta y+4z+8w=\beta-1. \end{cases}$$

a) Discuta o sistema em função dos parâmetros α e β.

b) Para $\alpha=-\frac{1}{4},\ \beta=0$ indique o conjunto-solução do sistema.

Capítulo 2

OPERAÇÕES COM MATRIZES

No capítulo anterior utilizámos as matrizes para simplificar o estudo e a resolução dos sistemas de equações lineares. Neste capítulo consideraremos as matrizes como entes matemáticos e definiremos algumas operações matriciais e as suas principais propriedades.

2.1 Definições Básicas e Exemplos de Matrizes

A notação que temos usado para um vector de $\mathbb{R}^n$ é

$$v = (v_1, \ldots, v_n).$$

Atendendo a que um vector de $\mathbb{R}^n$ é uma lista de n números (as componentes do vector) ordenados, qualquer notação que tenha as componentes do vector pela mesma ordem é uma outra forma de escrever o vector. Por exemplo, podemos escrever o vector v como a matriz

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$

(matriz linha) ou

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

(matriz coluna).

Apesar de já termos falado de matriz, no capítulo anterior, começamos este capítulo pela sua definição.

Definição 2.1 **Matriz** *é um quadro de números, denominados* **entradas da matriz***, dispostos em m linhas e n colunas, e por isso diz-se que a* **matriz é de tamanho** $m \times n$ *(ou de tipo $m \times n$).*

Atenção: Quando dizemos que a matriz é de tipo $r \times s$, na expressão $r \times s$, primeiro escrevemos o número de linhas da matriz (neste caso r) e por último escrevemos o número de colunas da matriz (neste caso s).

Vejamos alguns exemplos de tipos de matrizes:

- Como já o dissemos, uma **matriz linha** é uma matriz com uma única linha, portanto de tamanho $1 \times n$ (ou, de tipo $1 \times n$).
- Uma **matriz coluna** é uma matriz de tipo $m \times 1$.
- Chamamos **matriz nula** de tipo $m \times n$, à matriz de tipo $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero. Esta matriz é denotada por $0_{m \times n}$.
- Uma matriz diz-se **quadrada** se o número das suas linhas for igual ao número das suas colunas. Neste caso, se for de tipo $n \times n$, dizemos que é uma matriz quadrada de **ordem** n. Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2, ou simplesmente matriz de ordem 2.

Notação 2.2 *A notação usual para designar uma matriz A de tipo $m \times n$ (repare-se que em primeiro lugar aparece o número de linhas da matriz) é*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

em que a_{ij} é o elemento que ocupa **a posição** (i,j) *(ou* **a entrada** (i,j)*) da matriz A, ou seja, a_{ij} encontra-se na linha i e coluna j de A. Também se usa a notação $(A)_{ij}$ para designar o elemento que ocupa a posição (i,j) da matriz A.*

Quando queremos uma notação mais compacta para a matriz A, escrevemos $A = [a_{ij}]$.

Exemplo 2.3 *A matriz* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$ *é de tipo 3×4 e o elemento que ocupa a posição $(2,3)$ é o número 1. O número 7 ocupa a posição $(3,3)$ desta matriz.*

Definição 2.4 *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n.*

Os elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a **diagonal principal** *da matriz A.*

Dizemos que A é uma matriz **triangular superior** *se as entradas abaixo da diagonal principal são nulas, isto é, se A é da forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que A é uma matriz **triangular inferior** *se as entradas acima da diagonal principal são nulas, isto é, se A é da forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que A é uma **matriz diagonal** *se for triangular inferior e triangular superior, isto é, se A é da forma*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que A é uma **matriz escalar** *se for diagonal com $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$ (as entradas da diagonal principal são iguais).*

Entre as matrizes escalares há a destacar a

- **matriz nula** *de ordem n. A notação usual da matriz nula de ordem n é 0_n;*
- **matriz identidade**, *matriz que tem $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$. A notação usual da matriz identidade de ordem n é I_n.*

Exemplo 2.5 *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é triangular superior.*

A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *é triangular inferior.*

A matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é diagonal.*

Em qualquer uma delas, os elementos $2, -1, 0$ formam a sua diagonal principal.

As matrizes $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *são todas escalares sendo a segunda a matriz nula de ordem 2 e a terceira a matriz identidade de ordem 2.*

Definição 2.6 *Duas matrizes A e B dizem-se iguais se tiverem o mesmo tamanho e os elementos das entradas correspondentes iguais. Neste caso, escrevemos $A = B$.*

2.2 Operações com Matrizes

Como veremos ao longo desta secção, muitas das operações que se efectuam com matrizes não são mais do que generalizações das respectivas operações em $\mathbb{R}$. No entanto, há certas operações que se efectuam nas matrizes e que não têm significado em $\mathbb{R}$.

2.2.1 Soma de Matrizes e Produto de um Escalar por uma Matriz

Como sabemos somar 2 vectores e multiplicar um escalar por um vector, e já vimos na secção anterior como representar um vector na forma matricial, estamos em condições de definir as operações de soma de matrizes e produto de um escalar por uma matriz.

Definição 2.7 *Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz de tipo $m \times n$ e α um escalar (isto é, α um número). O produto αA é a matriz de tipo $m \times n$ que se obtém multiplicando cada entrada de A por α, isto é,*

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Definição 2.8 *Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes de tipo $m \times n$. A soma da matriz A com a matriz B, que se denota por $A + B$, é a matriz de tipo $m \times n$ cuja entrada (i, j) é o elemento $a_{ij} + b_{ij}$, isto é,*

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Exemplo 2.9 *Consideremos as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

As duas matrizes são de tipo 3×2, pelo que podemos somá-las

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & -1+2 \\ 3+2 & 0+2 \\ -1+0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Já a matriz

$$3A = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times(-1) \\ 3\times 3 & 3\times 0 \\ 3\times(-1) & 3\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Relativamente às operações atrás definidas temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.10 *Sejam A, B, C matrizes de tipo $m \times n$ e α, β escalares. Tem-se:*

1. $A + B = B + A$ (*comutatividade da adição*)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*associatividade da adição*)
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
6. $(-\alpha)A = -(\alpha A) = \alpha(-A)$ *em que* $-A$ *significa* $(-1)A$.

Demonstração Vamos demonstrar a propriedade 4..

Como $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ são matrizes de tipo $m \times n$, então, por definição, $\alpha(A + B)$ e $\alpha A + \alpha B$ são de tipo $m \times n$. Atendendo às definições,

$$(\alpha(A + B))_{ij} = \alpha(A + B)_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}).$$

Usando a propriedade distributiva do produto em relação à adição de números, vem que

$$(\alpha(A + B))_{ij} = \alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}.$$

Usando as definições, temos

$$(\alpha(A + B))_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\alpha B)_{ij} = (\alpha A + \alpha B)_{ij}.$$

□

2.2.2 Produto de uma Matriz por uma Matriz Coluna

Vejamos em primeiro lugar como se define o produto de uma matriz por uma matriz coluna.

Em certas ocasiões é conveniente pensarmos numa matriz como uma sequência de matrizes linha ou matrizes coluna, que podem ser traduzidas em vectores.

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

então A pode ser subdividida em matrizes coluna

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \left[\, C_1 \; C_2 \; C_3 \; C_4 \,\right]$$

em que $C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix}$ é a j-ésima coluna de A, com $j = 1, 2, 3, 4$.

Ou subdividir A em matrizes linha

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ - & - & - & - \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ - & - & - & - \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

em que $R_i = \left[\, a_{i1} \; a_{i2} \; a_{i3} \; a_{i4} \,\right]$ é a i-ésima linha de A, com $i = 1, 2, 3$.

Já vimos que um sistema de m equações lineares a n incógnitas, (1.1),

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

tem 3 matrizes associadas:

-a matriz simples do sistema, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

-a matriz dos termos independentes, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$,

-a matriz das incógnitas, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Vamos definir o produto AX por forma a que o sistema (1.1) possa ser escrito pela expressão matricial $AX = B$. A partir de agora, sempre que tivermos um sistema, podemos escrevê-lo na forma (1.1) (conjunto de equações lineares) ou na forma matricial $AX = B$.

Ora (1.1) na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(recorde-se que duas matrizes são iguais se forem do mesmo tipo e as correspondentes entradas forem iguais).

Atendendo à soma de matrizes e ao produto de um escalar por uma matriz, a matriz anterior pode ser escrita como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Concluímos que

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Portanto, podemos definir o produto de uma matriz por uma matriz coluna.

Definição 2.11 *Se A é uma matriz $m \times n$ e X é uma matriz coluna $n \times 1$, então o produto AX é uma matriz coluna $m \times 1$ que resulta da combinação linear das matrizes coluna de A, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, tendo como coeficientes (da combinação linear) as entradas de X, isto é,*

$$AX = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_nC_n.$$

Atenção: Para podermos efectuar o produto AX, o número de colunas da matriz A tem que ser igual ao número de linhas da matriz X. O produto AX é uma matriz com o número de linhas igual ao número de linhas da matriz A e, com o número de colunas igual ao número de colunas da matriz X.

Exemplo 2.12

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Vejamos agora duas propriedades que envolvem os três tipos de operações definidos:

Proposição 2.13 *Sejam A uma matriz $m \times n$, B e D matrizes coluna $n \times 1$ e α um escalar. Tem-se:*

1. $A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B$

2. $A(B+D) = AB + AD$.

Demonstração Sejam $C_1, \ldots, C_n$ as matrizes coluna de A e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$.

Então,

$$\alpha B = \begin{bmatrix} \alpha b_1 \\ \vdots \\ \alpha b_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B + D = \begin{bmatrix} b_1 + d_1 \\ \vdots \\ b_n + d_n \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A(\alpha B) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha b_1 \\ \vdots \\ \alpha b_n \end{bmatrix} = (\alpha b_1)C_1 + (\alpha b_2)C_2 + \ldots + (\alpha b_n)C_n =$$

porque α e b_i são escalares, $i = 1, \ldots, n$

$$= \alpha(b_1C_1) + \alpha(b_2C_2) + \ldots + \alpha(b_nC_n) = \alpha(b_1C_1 + b_2C_2 + \ldots + b_nC_n) = \alpha(AB).$$

Da mesma forma,

$$A(B+D) = (b_1 + d_1)C_1 + \ldots + (b_n + d_n)C_n =$$

porque b_i, d_i são escalares, $i = 1, \ldots, n$,

$$= b_1C_1 + d_1C_1 + \ldots + b_nC_n + d_nC_n =$$

usando a comutativa da soma de matrizes

$$= (b_1C_1 + \ldots + b_nC_n) + (d_1C_1 + \ldots + d_nC_n) = AB + AD.$$

□

2.2.3 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de tipo $m \times n$, α um escalar (número real) e $0_{m\times n}$ a matriz nula de tipo $m \times n$, tais que

$$\alpha A = \alpha^2 B.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $\alpha a_{ij} = (\alpha^2 B)_{ij}$.

[B] $\alpha A - \alpha^2 B = 0_{m\times n}$.

[C] $\alpha(A - \alpha B) = 0_{m\times n}$.

[D] $A - \alpha B = 0_{m\times n}$.

2. Considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ -x + 4y = 3. \end{cases}$$

A forma matricial, $AX = B$, deste sistema é:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Seja A uma matriz de tipo 5×4 e C uma matriz coluna tal que é possível efectuar o produto AC. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ AC é uma matriz linha.

$\boxed{\text{B}}$ AC é uma matriz de tipo 5×4.

$\boxed{\text{C}}$ AC tem 4 linhas.

$\boxed{\text{D}}$ AC é uma matriz coluna.

4. Sejam A uma matriz de ordem n e C uma matriz coluna tal que é possível efectuar o produto AC. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $A(C + 2C) = 3(AC)$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $AC = 0_{n\times 1}$, então $A = 0_n$ ou $C = 0_{n\times 1}$.

$\boxed{\text{C}}$ $(A + 2A)C = A(C + 2C)$.

$\boxed{\text{D}}$ $A(2C - C) = AC$.

5. Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $r \times s$. Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

$\boxed{\text{A}}$ Se $A = B$ então $m = r$ e $n = s$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $m \neq r$ então $A \neq B$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $n \neq r$ então $A \neq B$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $A = B$ então $m = r$.

2.2.4 Produto de Duas Matrizes

Vejamos agora como se efectua o produto de duas matrizes A e B quando B tem mais do que uma coluna. Para que o produto AB esteja definido, exigimos que a condição da associatividade

$$(AB)X = A(BX)$$

seja verdadeira para qualquer matriz coluna X, de tipo $n \times 1$.

Pelo que vimos anteriormente, se X tem n linhas, para o produto BX estar definido, B terá n colunas. Portanto, B é matriz de tipo $s \times n$. O que implica que BX é matriz coluna de tipo $s \times 1$. Mas então, para o produto $A(BX)$ estar definido, a matriz A deve ter s colunas. Consequentemente, mostrámos que para se conseguir efectuar o produto, o **número de colunas** de A tem de ser igual ao **número de linhas** de B.

Se as colunas de B forem $B_1, \ldots, B_n$, então

$$BX = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_n B_n$$

e usando a Proposição anterior,

$$A(BX) = A(x_1 B_1 + x_2 B_2 + \ldots + x_n B_n) = A(x_1 B_1) + A(x_2 B_2) + \ldots + A(x_n B_n)$$

$$= x_1(AB_1) + x_2(AB_2) + \ldots + x_n(AB_n).$$

Como queremos que $(AB)X = A(BX)$, vem que

$$(AB)X = x_1(AB_1) + \ldots + x_n(AB_n)$$

e podemos considerar que as colunas de AB são as matrizes coluna

$$AB_1, \ldots, AB_n.$$

Definição 2.14 *Sejam A uma matriz $m \times s$ e B uma matriz $s \times n$ cujas matrizes coluna são $B_1, \ldots, B_n$, o produto AB é a matriz $m \times n$ tal que $AB = [AB_1| \ldots |AB_n]$.*

Observação 1. Repare-se que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B para podermos efectuar o produto AB.

2. A matriz AB tem tantas linhas quantas as da matriz A e tantas colunas quantas as da matriz B.

Exemplo 2.15 *Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, o número de colunas de A é 4 e é o mesmo que o número de linhas de B. Portanto podemos efectuar o produto AB. Pela definição teremos de calcular o produto de A por cada coluna de B. Ora*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Observação Muitas vezes o produto AB e BA estão definidos, mas pode acontecer que $AB \neq BA$:

1. Se A for de tipo $n \times s$ e B de tipo $s \times n$, então AB é matriz de tipo $n \times n$ e BA é de tipo $s \times s$. Se $s \neq n$ então $AB \neq BA$ (para duas matrizes serem iguais têm de ser de mesmo tipo e ...)

2. Se A e B forem matrizes de ordem n, por exemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, matrizes de ordem 2, temos $AB = [AB_1 \; AB_2]$ sendo B_1, B_2 as matrizes coluna de B.

   Ora

$$AB_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AB_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   Pelo que $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Calculando BA temos que $BA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Donde, $AB \neq BA$.

Vejamos agora como encontrar uma entrada específica do produto de 2 matrizes, sem termos de calcular toda a matriz produto. Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz de tipo $m \times s$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz de tipo $s \times n$. Sabemos que é possível efectuar o produto AB, que será uma matriz de tipo $m \times n$. E se quisermos saber qual a entrada (i, j) de AB, isto é, qual o elemento, $(AB)_{ij}$, que ocupa a i-ésima linha e a j-ésima coluna de AB?

Sendo $B_1, \ldots, B_n$ as matrizes coluna de B, a j-ésima matriz coluna de AB é

$$AB_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix} =$$
$$= b_{1j} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + b_{sj} \begin{bmatrix} a_{1s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{bmatrix}.$$

Ora a entrada (i,j) de AB é a $(AB_j)_{i1}$, pelo que

$$(AB)_{ij} = b_{1j}a_{i1} + \dots + b_{sj}a_{is} = [a_{i1} \dots a_{is}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{bmatrix}.$$

Isto é, $(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de A pela j-ésima matriz coluna de B.

Exemplo 2.16 *Sendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$*, podemos efectuar o produto* AB *porque o número de linhas da matriz* A*, que é* 2*, é igual ao número de colunas da matriz* B*. A entrada* $(2,1)$ *de* AB *é*

$$(AB)_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \times 0 + (-1) \times 1 + (-2) \times (-1) = 1.$$

Temos as seguintes propriedades:

Proposição 2.17 *Seja* A *uma matriz de tipo* $n \times m$*. Tem-se:*

1. $I_nA = A$ *e* $AI_m = A$.

2. $O_nA = O_{n\times m}$ *e* $AO_m = O_{n\times m}$*, em que* $O_{n\times m}$ *é a matriz de tipo* $n \times m$ *com todas as posições iguais a zero.*

Proposição 2.18 *Sejam* A, B, C *três matrizes de tipo adequado por forma a que as operações indicadas se possam efectuar, e* α *um escalar. Tem-se:*

1. $A(BC) = (AB)C$ *(associatividade da multiplicação)*

2. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributividade)*

3. $(B + C)A = BA + CA$ *(distributividade)*

4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Demonstração Demonstremos 1. O que iremos mostrar é que a j-ésima matriz coluna de $A(BC)$ é igual à j-ésima matriz coluna de $(AB)C$. Seja C_j a j-ésima matriz coluna de C. Então a j-ésima matriz coluna de $(AB)C$ é $(AB)C_j$.

Como BC_j é a j-ésima coluna de BC, então $A(BC_j)$ é a j-ésima coluna de $A(BC)$.

Mas a multiplicação de matrizes foi criada para tornar $(AB)X = A(BX)$ verdadeiro para qualquer matriz coluna X apropriada, então

$$(AB)C_j = A(BC_j).$$

□

2.2.5 Transposta de uma Matriz

Vejamos uma operação com matrizes que não tem paralelo com a álgebra dos números reais.

Definição 2.19 *Seja A uma matriz $m \times n$, então a* **matriz transposta de** *A, denotada por A^T, é a matriz $n \times m$ que se obtém de A transformando as linhas de A em colunas de A^T, isto é,*

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}.$$

Exemplo 2.20 *A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz*

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Relativamente à operação de transposição, temos:

Proposição 2.21 *Sejam A, B matrizes de tipo adequado por forma a que as operações indicadas se possam efectuar, e α um escalar. Tem-se:*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$
4. $(\alpha A)^T = \alpha(A)^T$

Demonstração Demonstremos a propriedade 3. Sendo $A = [a_{ij}]$ uma matriz de tipo $m \times s$ e $B = [b_{ij}]$ uma matriz de tipo $s \times n$, vem que

$$\begin{aligned}((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} \text{ (definição de matriz transposta)}\\ &= [a_{j1} \dots a_{js}] \begin{bmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{si} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Atendendo a que a linha i de B^T é a coluna i de B

$$(B^T A^T)_{ij} = [b_{1i} \dots b_{si}] \begin{bmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{js} \end{bmatrix}$$

obtemos que $(AB)^T = B^T A^T$, uma vez que AB é matriz $m \times n$, $(AB)^T$ é matriz $n \times m$ e $B^T A^T$ é matriz $n \times m$. □

Definição 2.22 *Uma matriz A diz-se* **simétrica** *se $A^T = A$, e* **hemi-simétrica** (*ou* **anti-simétrica**) *se $A^T = -A$.*

Exemplo 2.23 *A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica e a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi-simétrica. Já a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica nem hemi-simétrica.*

Proposição 2.24 *Sejam A, B matrizes simétricas de tipo adequado por forma a que as operações indicadas se possam efectuar, e α um escalar. Tem-se:*

1. *A^T é simétrica*
2. *$A + B$ é simétrica*
3. *αA é simétrica*
4. *AB é simétrica se, e só se, $AB = BA$.*

2.2.6 Inversa de uma Matriz

Nos números reais, cada número não nulo a tem um inverso para a multiplicação, isto é, existe a^{-1}(real) tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Vejamos uma definição análoga para matrizes.

Definição 2.25 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é* **invertível** *se existir uma matriz B tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

Observação

1. Para que o produto AB e BA estejam definidos, B tem que ser uma matriz quadrada de ordem n.

2. Se $AB = BA = I_n$, sendo A uma matriz quadrada de ordem n, então, também temos $BA = AB = I_n$. Portanto, B é invertível.

Vejamos que a definição introduzida está bem formulada.

Proposição 2.26 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, invertível. Então, existe uma única matriz B tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

Demonstração A existência de uma matriz B nestas condições está garantida pela definição de matriz invertível. Suponhamos que B, C são duas matrizes tais que

$$AB = BA = I_n \quad , \qquad AC = CA = I_n.$$

Então, porque $I_nD = D = DI_n$, qualquer que seja D de ordem n,

$$C = I_nC \underset{\substack{\uparrow \\ BA=I_n}}{=} (BA)C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associativa}}}{=} B(AC) \underset{\substack{\uparrow \\ AC=I_n}}{=} BI_n = B.$$

Ou seja, $B = C$ e só existe uma matriz que verifica a condição. $\square$

Definição 2.27 *Seja A uma matriz invertível de ordem n. À única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ chamamos* **inversa** *de A e denotamo-la por A^{-1}.*

Nem todas as matrizes são invertíveis:

Definição 2.28 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se A não é invertível dizemos que A é* **singular**.

Exemplo 2.29 1. *Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $AB = BA = I_2$, pelo que B é a inversa de A e A é a inversa de B.*

2. *Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, qualquer que seja $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ vem que*

$$A \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = b_{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{11} + b_{21} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = b_{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b_{22} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{12} + b_{22} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donde

$$AB = \begin{bmatrix} 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Ou seja, A é singular.

Proposição 2.30 *Seja A uma matriz de ordem n.*

1. *Se A tem uma coluna nula então A é singular.*
2. *Se A tem uma linha nula então A é singular.*

Demonstração

1. Suponhamos que A é invertível e seja B a matriz inversa de A. Então, $BA = I_n$. Seja i a coluna de A que é nula. Como pela Proposição 2.17, $B \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Então, BA tem a coluna i nula, o que é impossível pois $BA = I_n$. Portanto, A é singular.
2. Se A tem uma linha nula então A^T tem uma coluna nula. Por 1., A^T é singular. Se A fosse invertível, existia uma matriz B tal que $AB = I_n = BA$. Mas então, $(AB)^T = I_n = (BA)^T$. Ou seja, $B^T A^T = I_n = A^T B^T$, isto é, A^T era invertível. Contradição. Portanto, A é singular. □

Proposição 2.31 *Sejam A e B matrizes invertíveis de ordem n, então AB é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração Porque

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associativa}}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ B^{-1} \text{ inversa de } B}}{=} AI_nA^{-1} = AA^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ A^{-1} \text{ inversa de } A}}{=} I_n$$

e da mesma forma

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n,$$

podemos afirmar, atendendo à unicidade da inversa, que AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. □

2.2.7 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Sejam A uma matriz de tipo 2×5, B uma matriz que é possível efectuar o produto AB, sendo AB uma matriz de tipo 2×5. Então, B é uma matriz de tipo:

   $\boxed{\text{A}}$ 2×2.

   $\boxed{\text{B}}$ 5×5.

   $\boxed{\text{C}}$ 2×5.

   $\boxed{\text{D}}$ 5×2.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   A matriz $A + BC$ é igual a:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então $(AB)_{12}$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ 4.

   $\boxed{\text{B}}$ 13.

   $\boxed{\text{C}}$ 8.

   $\boxed{\text{D}}$ 5.

4. Sejam A uma matriz de tipo 4×4, B uma matriz de tipo 5×4 e C uma matriz de tipo 4×5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ É possível efectuar as operações $A(B^T + C)$, que é uma matriz de tipo 4×4.

   $\boxed{\text{B}}$ É possível efectuar o produto BA, que é uma matriz de tipo 5×4.

   $\boxed{\text{C}}$ É possível efectuar o produto $C^T A$, que é uma matriz com 4 colunas.

   $\boxed{\text{D}}$ É possível efectuar as operações $B - C^T A$, que é uma matriz de tipo 5×4.

5. Sejam A, B matrizes de tipo 3×4. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $(AB^T)^T$ é uma matriz 4×4.

   $\boxed{\text{B}}$ A^T é uma matriz 4×3.

   $\boxed{\text{C}}$ $A^T B$ é uma matriz 4×4.

   $\boxed{\text{D}}$ AB^T é uma matriz 3×3.

6. Seja A uma matriz simétrica de ordem 3 e B uma matriz hemi-simétrica de ordem 3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $(A - B)^T = A + B$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(AB)^T = -BA$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(AB^T)^T + (AB)^T = 0_3$.

   $\boxed{\text{D}}$ $A^T B = (BA)^T$.

7. Sejam A e B matrizes de ordem 2, invertíveis. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $(A^{-1}B)$ é invertível e $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

   $\boxed{\text{B}}$ $A + B$ é invertível e $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $3A$ é invertível e $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$.

$\boxed{\text{D}}$ A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

8. Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

   $\boxed{\text{A}}$ $3A + 3B = 3(A + B)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $4A + 4A = 4(2A)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(AB)^T = A^T B^T$.

   $\boxed{\text{D}}$ $A(3B) = 3(AB)$.

2.2.8 Potências de uma Matriz

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, definimos as potências inteiras, não negativas, de A por

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ A^k &= A^{k-1}A, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Se A é invertível, definimos as potências inteiras negativas de A por

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \quad \text{para } k \in \mathbb{N}.$$

As leis usuais das potências são válidas para matrizes, isto é,

$$\begin{aligned} (A^r)^s &= (A^{rs}) \\ A^r.A^s &= A^{r+s}. \end{aligned}$$

Proposição 2.32 *Sejam A uma matriz invertível de ordem n, α um escalar não nulo e $k \in \mathbb{N}_0$. Então:*

1. *A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *A^k é invertível e $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k = A^{-k}$.*
3. *αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.*

Exemplo 2.33 *Sabendo que a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vamos determinar a inversa de A^2. Como $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ vem que*

$$(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Não necessitámos de calcular A^2 e depois a sua inversa, porque usámos a Proposição 2.32.

2.3 Matrizes Elementares

No capítulo anterior falámos nas transformações elementares que se podem efectuar nas linhas de uma matriz:

1. Multiplicar uma linha por uma constante não nula;
2. trocar duas linhas;
3. somar um múltiplo de uma linha a outra linha.

Definição 2.34 *Chamamos* **matriz elementar** *a qualquer matriz que se obtém da matriz identidade efectuando* **uma única** *transformação elementar.*

Exemplo 2.35 1. *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ *é matriz elementar porque foi obtida da matriz* I_2 *através da transformação elementar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to -2l_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. *A matriz* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, que foi obtida da matriz* I_3 *efectuando a transformação elementar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é uma matriz elementar.

3. *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, é elementar porque foi obtida da matriz* I_3 *efectuando a transformação elementar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_1 \to (l_1 - 2l_2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes elementares são importantes porque podem ser usadas para efectuar transformações elementares nas linhas de uma matriz, se multiplicadas à esquerda por essa matriz.

Proposição 2.36 *Sejam* A *uma matriz* $m \times n$ *e* E *uma matriz elementar de ordem* m*. Se efectuarmos em* A *a mesma transformação elementar que transforma* I_m *em* E*, obtemos* EA*.*

Exemplo 2.37 *Considere a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se efectuar a transformação elementar nas linhas de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to (l_2 - 2l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Se fizermos a mesma transformação elementar nas linhas de I_2*, temos*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to (l_2 - 2l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vejamos se EA *dá o mesmo resultado*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Como se vê, a multiplicação por E*, soma à segunda linha de* A *a primeira linha multiplicada por* -2.

Proposição 2.38 *Seja* E *uma matriz elementar de ordem* n*. Então* E *é invertível, a sua inversa é matriz elementar e*

1. *Se* $I_n \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} E$*, com* $\alpha \neq 0$*, então* $I_n \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} E^{-1}$.

2. *Se* $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$*, então* $I_n \underset{l_j \leftrightarrow l_i}{\longrightarrow} E^{-1}$.

3. *Se* $I_n \underset{l_i \to (l_i + \alpha l_j)}{\longrightarrow} E$*, então* $I_n \underset{l_i \to (l_i - \alpha l_j)}{\longrightarrow} E^{-1}$.

Exemplo 2.39 *Sendo* $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *a matriz elementar que se obteve da matriz* I_3 *efectuando a transformação elementar* $l_1 \to (l_1 - 2l_2)$*, então pela* Proposição 2.38*,* E^{-1} *é a matriz elementar que se obtém de* I_3 *efectuando a transformação elementar* $l_1 \to (l_1 + 2l_2)$*, ou seja,*

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pode confirmar-se este resultado efectuando os produtos EE^{-1} *e* $E^{-1}E$*, e vendo que são iguais a* I_3.

2.4 Caracterização das Matrizes Invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é ou não invertível. Vejamos processos que nos permitam conhecer a invertibilidade de uma matriz.

Teorema 2.40 *Seja A uma matriz invertível de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *A é invertível*
2. $r(A) = n$
3. *A forma de escada reduzida de A é I_n*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Demonstração Podemos demonstrar a equivalência entre as 4 afirmações estabelecendo a cadeia de implicações

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 1.$$

1. $\Rightarrow$ 2. Suponhamos que A é invertível e seja B uma matriz em forma de escada obtida a partir de A. Como B é obtida de A através de uma sequência ordenada de transformações elementares nas linhas, então existe uma sequência ordenada de matrizes elementares (cada uma delas corresponde a uma transformação elementar efectuada nas linhas de A), $E_1, \ldots, E_k$ tais que

$$B = E_k \ldots E_1 A$$

(neste caso, primeiro efectuamos a transformação elementar que é representada pela matriz E_1 e a última transformação elementar está representada pela matriz E_k). Porque toda a matriz elementar é invertível, A também é invertível e produto de matrizes invertíveis é invertível, então B é invertível. Consequentemente, pela Proposição 2.30, B não pode ter linhas nulas, e $r(A) = r(B) = n$.

2. $\Rightarrow$ 3. Se $r(A) = n$, então qualquer matriz em forma de escada obtida a partir de A terá característica n. Sendo B' a matriz em forma de escada reduzida que se obtem de A, então $r(B') = n$. Porque A tem ordem n, então $B' = I_n$.

3. $\Rightarrow$ 4. Se a forma de escada reduzida de A é I_n, então existe uma sequência de matrizes elementares, $E_1, \ldots, E_k$ tais que

$$I_n = E_k \ldots E_1 A.$$

Como as matrizes elementares são invertíveis, então

$$(E_k \ldots E_1)^{-1} I_n = (E_k \ldots E_1)^{-1} E_k \ldots E_1 A.$$

Assim,

$$(E_k \ldots E_1)^{-1} = A,$$

e portanto,

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}.$$

Cada E_i^{-1} é uma matriz elementar, pelo que temos 4.

4. $\Rightarrow$ 1. Se A pode escrever-se como produto de matrizes elementares e, porque, as matrizes elementares são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é invertível, então A é invertível. $\square$

Pelo Teorema anterior vemos que se A é uma matriz invertível de ordem n, a forma de escada reduzida de A é I_n, sendo esta obtida através do produto de matrizes elementares $E_1, \dots, E_k$. Isto é,

$$I_n = E_k \dots E_1 A.$$

Daqui vem que

$$A^{-1} = E_k \dots E_1 = (E_k \dots E_1) I_n$$

(A^{-1} escrita como produto de matrizes elementares). Mas isto significa que a mesma sequência de transformações elementares que permitiu obter I_n de A, permite obter A^{-1} de I_n. Esquematicamente, se pensarmos na matriz

$$[A|I_n]$$

e efectuarmos a sequência de transformações elementares que permitem obter I_n de A, obtemos a matriz

$$[I_n|A^{-1}].$$

Repare-se que neste caso, se $I_n = E_k \dots E_1 A$, como as matrizes elementares são invertíveis,

$$A = E_1^{-1} \dots E_k^{-1}$$

(A escrita como produto de matrizes elementares).

Exemplo 2.41 1. *Consideremos a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. *Vejamos se A é invertível e caso seja, calculemos a sua inversa.*

Vamos usar o algoritmo anterior,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_2 \to (l_2 + 2l_1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Como obtivemos uma matriz com uma linha de zeros do lado esquerdo, A não é invertível (A é singular).

2. *Consideremos a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *e determinemos, caso exista, a sua inversa.*

Pelo algoritmo temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to \frac{1}{2}l_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3 + l_1)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to (l_1 - l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Assim, A é invertível (do lado esquerdo aparece I_3) e do lado esquerdo temos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos escrever A e A^{-1} como produto de matrizes elementares. A primeira transformação elementar que efectuámos corresponde à matriz elementar

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A segunda transformação elementar que efectuámos corresponde à matriz elementar

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A terceira transformação elementar que efectuámos corresponde à matriz elementar

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo que

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{-1} = E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.5 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

   $$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

$\boxed{\text{B}}$ Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$\boxed{\text{C}}$ Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

$$(AB)^n = A^n B^n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{\text{D}}$ Se A e B são matrizes quadradas do mesmo tamanho então

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

2. Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Quais são as matrizes elementares e quais é que não são?

$\boxed{\text{A}}$ E_1, E_2, E_3 e E_4 são matrizes elementares.

$\boxed{\text{B}}$ $E_1,\ E_2$ são matrizes elementares e $E_3,\ E_4$ não são matrizes elementares.

$\boxed{\text{C}}$ E_2, E_3 são matrizes elementares e E_1, E_4 não são matrizes elementares.

$\boxed{\text{D}}$ E_1, E_2, E_3 são matrizes elementares e E_4 não é matriz elementar.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Efectuar o produto EA é o mesmo que efectuar, na matriz A, a transformação elementar:

$\boxed{\text{A}}$ $l_2 \to (l_2 - l_1)$.

$\boxed{\text{B}}$ $l_2 \to -l_2$.

$\boxed{\text{C}}$ $l_1 \to -l_1$.

$\boxed{\text{D}}$ $l_1 \to (l_1 - l_2)$.

4. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Seja A uma matriz invertível de ordem n. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $r(A) = r(I_n)$.

$\boxed{\text{B}}$ A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.

$\boxed{\text{C}}$ I_n não é uma forma de escada obtida de A.

$\boxed{\text{D}}$ A^{-1} é invertível.

6. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A = B.$

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B = A.$

$\boxed{\text{C}}$ $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$

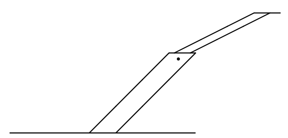
$\boxed{\text{D}}$ $B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = A.$

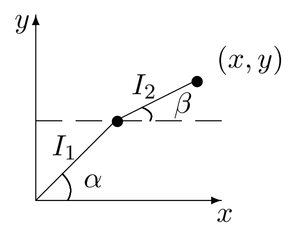
2.6 Aplicações das Matrizes

Vejamos algumas aplicações das matrizes a problemas práticos que nos podem surgir.

2.6.1 Uma Aplicação à Robótica

Consideremos o seguinte robot industrial simplificado, que consiste num braço e num antebraço que podem ser girados independentemente por ângulos α e β e que podem ser colocados independentemente com comprimentos I_1 e I_2.





Para ângulos α e β fixos, quais deveriam ser os comprimentos do braço e do antebraço para poder colocar a ponta do robot no ponto (x, y)?

Como é conhecido,

$$\begin{cases} x = I_1 \cos\alpha + I_2 \cos\beta \\ y = I_1 sen\ \alpha + I_2 sen\ \beta \end{cases}$$

Estamos perante um sistema de 2 equações a 2 incógnitas. Este sistema na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ sen\ \alpha & sen\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Porque a matriz simples do sistema é

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ sen\ \alpha & sen\ \beta \end{bmatrix}$$

e $\cos\alpha\ sen\ \beta - sen\ \alpha \cos\beta = sen\ (\beta-\alpha)$, mostra-se que $r(A) = 2$ se, e só se, $\beta - \alpha$ não é múltiplo de π.

Pelo Teorema 2.40, se $\beta - \alpha$ não é múltiplo de π, então A é invertível e como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \text{ vem que } A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}A \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \text{ Donde, } \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Mas,

$$A^{-1} = \frac{1}{sen\ (\beta-\alpha)} \begin{bmatrix} sen\ \beta & -\cos\beta \\ -sen\ \alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

donde,

$$I_1 = \frac{sen\ \beta}{sen\ (\beta-\alpha)} x - \frac{\cos\beta}{sen\ (\beta-\alpha)} y$$

e

$$I_2 = -\frac{sen\ \alpha}{sen\ (\beta-\alpha)} x + \frac{\cos\alpha}{sen\ (\beta-\alpha)} y.$$

2.6.2 Resolução de Sistemas

O processo que foi utilizado no exemplo anterior, pode ser usado para qualquer sistema de n equações a n incógnitas (ou variáveis) desde que seja conhecido que a matriz simples do sistema é invertível. Isto é, se o sistema de n equações a n incógnitas, estiver na forma matricial $AX = B$, sendo A a matriz simples, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes e se a matriz A for invertível, então a única solução do sistema (sistema possível e determinado) é

$$X = A^{-1}B.$$

Exemplo 2.42 *Resolvamos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

O sistema tem 3 equações e 3 incógnitas. Vejamos se a matriz simples do sistema é invertível. Ora esta matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. *Determinemos, caso exista, a sua inversa.*

Pelo algoritmo temos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{l_2 \to (l_2 - l_1) \\ l_3 \to (l_3 - 2l_1)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to -l_3}}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{l_1 \to (l_1 - 2l_3) \\ l_2 \to (l_2 - l_3)}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to (l_1 + l_2)}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Assim, A é invertível e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pelo processo descrito anteriormente, a solução do sistema é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, o conjunto solução do sistema é

$$\{(-8, -1, -6)\}.$$

2.7 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ escrita como um produto de matrizes elementares é:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$

3. Seja A a matriz invertível de ordem 2, tal que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $AA^{-1} = I_2$.

$\boxed{\text{D}}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Toda a matriz invertível pode ser factorizada como um produto de matrizes elementares.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é uma matriz quadrada singular, então o sistema $AX = B$ tem infinitas soluções.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é uma matriz quadrada singular, então a sua forma de escada reduzida tem pelo menos uma linha nula.

$\boxed{\text{D}}$ Se A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares, então o sistema linear homogéneo $AX = 0$ tem apenas a solução nula.

5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se A é matriz quadrada e o sistema $AX = 0$ só tem a solução nula, então A é invertível.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é uma matriz quadrada e α é um escalar tal que αA é matriz singular, então A é matriz singular.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é uma matriz quadrada que tem a forma de escada reduzida com pelo menos uma linha nula, então A é singular.

$\boxed{\text{D}}$ Se A é uma matriz quadrada singular e se B é obtida de A por troca de duas linhas, então B também é singular.

6. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, na forma matricial. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se A é invertível, a solução do sistema é $X = BA^{-1}$.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é invertível, a solução do sistema é $X = A^{-1}B$.

$\boxed{\text{C}}$ Se A é invertível, a solução do sistema é $X = B^T A^{-1}$.

$\boxed{\text{D}}$ Se A é invertível, a solução do sistema é $X = A^{-1}B^T$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$. A solução do sistema $AX = B$ é:

$\boxed{\text{A}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $X^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{D}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.8 Exercícios

1. Resolva cada equação matricial em a, b, c e d:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 11 & \frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) Qual o tamanho (tipo) da matriz A?

   b) Quais os valores das entradas (posições) $(1, 2)$ e $(2, 1)$?

   c) Para que pares (i, j) se tem $a_{ij} = 1$?

   d) Indique qual é a 2^{a} coluna de A e qual é a sua 1^{a} linha.

3. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{i,j\in\{1,2,3\}}$ definida por:

   a) $a_{ij} = i + j$

   b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -1, & i > j \\ 2, & i < j. \end{cases}$

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule, quando possível:

   a) $A + 2B$

   b) $3B + D$

   c) $4D - 3C$

   d) $3A + 4A$

   e) $3(-A)$

   f) $2(3A)$

   g) $A + (2B + A)$.

5. Apresente cada um dos sistemas sob a forma matricial $AX = B$:

   a) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 7 \\ 9x - y + z = -1. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ x + 5y - 2z = -2. \end{cases}$

6. Determine a, b e c números reais: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

7. Calcule, se possível, os produtos AB, quando:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

8. Calcule, se possível, os produtos AB e BA, quando:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

9. Utilizando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule $(AB)_{12}$, a primeira linha de AB e a terceira coluna de AB.

10. Para cada par de matrizes indicadas determine, se possível, as matrizes AB, $(AB)^T$, B^TA^T e A^TB^T.

    a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

    b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

    Determine as matrizes simétricas e as matrizes hemi-simétricas.

12. Mostre que a única matriz de ordem n que é simétrica e anti-simétrica é a matriz nula.

13. Para cada par de matrizes indicadas determine, se possível, as matrizes A^2, B^2, AB e BA.

    a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$.

14. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule, quando possível:

    a) $AD + BD$
    b) $BD + A$
    c) $(A + B)D$
    d) $D^T(A^T + B^T)$.
    e) $(C^2)^T$
    f) $(C^T)^2$

15. Obtenha uma fórmula para A^n, $n \in \mathbb{N}$, onde A é a matriz:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

    d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

16. Verifique se as matrizes apresentadas são elementares e em caso afirmativo determine a respectiva matriz inversa:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

    e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

17. Verifique se as matrizes seguintes são, ou não, invertíveis:

    a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

18. Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes, com $a, b, c \in \mathbb{R}$:

    a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

19. Calcule, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

    a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

20. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

    a) Determine matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_1 E_2 A = I$.

b) Escreva A^{-1} como um produto de duas matrizes elementares.

c) Escreva A como um produto de duas matrizes elementares.

21. Expresse A e A^{-1} como produto de matrizes elementares:

$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. Factorize a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

como $A = EFGR$, onde E, F e G são matrizes elementares e R é uma matriz em forma de escada.

23. Resolva os seguintes sistemas utilizando a inversa da matriz simples do sistema:

a) $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 5z = -1 \\ y - 3z = -1 \\ z = 3. \end{cases}$

Capítulo 3

SUBESPAÇOS VECTORIAIS DE $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo iremos estender as noções de recta e plano de $\mathbb{R}^n$, que passam na origem, a outros tipos de objectos geométricos em $\mathbb{R}^n$, os subespaços vectoriais.

3.1 Definição de Subespaço Vectorial de $\mathbb{R}^n$

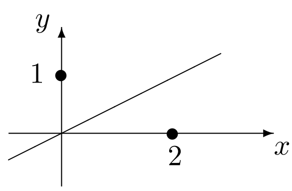
Dado um vector não nulo de $\mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, a **equação vectorial da recta** que passa pela origem e tem vector director v é (estamos a omitir o ponto $(0, \ldots, 0)$)

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se pensarmos num plano de $\mathbb{R}^n$, para escrevermos uma sua equação vectorial teremos de ter dois vectores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ (que não tenham a mesma direcção), sendo uma **equação vectorial do plano** que passa pela origem,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \mu(v_1, v_2, \ldots, v_n), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.1 1. *A equação* $(x_1, x_2) = \lambda(2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *define a equação vectorial da recta de* $\mathbb{R}^2$ *que passa pela origem e tem como vector director, o vector* $(2, 1)$.



2. *A equação* $(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(2, 0, 1) + \lambda_2(-2, 0, -1)$, *com* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, *não define um plano de* $\mathbb{R}^3$ *pois os vectores* $(2, 0, 1)$ *e* $(-2, 0, -1)$ *têm a mesma direcção. A equação anterior é equivalente à equação*

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(2, 0, 1) \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

que define uma recta de $\mathbb{R}^3$.

Notação 3.2 *Para simplificar, se denotarmos um ponto de* $\mathbb{R}^n$ *por uma das letras* $x, y, \ldots,$ *(com ou sem índice) e cada vector de* $\mathbb{R}^n$ *por uma das letras* $u, v, \ldots,$ *(com ou sem índice) (recorde-se que cada ponto de* $\mathbb{R}^n$ *e cada vector de* $\mathbb{R}^n$ *tem* n *coordenadas), as equações anteriores podem ser escritas na forma*

$$\begin{array}{lll} x = \lambda v, & \lambda \in \mathbb{R} & (\textit{equação da recta de } \mathbb{R}^n) \\ x = \lambda_1 u + \lambda_2 v, & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} & (\textit{equação do plano de } \mathbb{R}^n). \end{array}$$

Observação Tenha em atenção que na forma resumida,

$$x = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ v \text{ vector não nulo}$$

pode designar uma recta de $\mathbb{R}^2$ ou uma recta de $\mathbb{R}^3$ ou, mais geralmente, de $\mathbb{R}^n$, consoante o vector v for um vector de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.3 *Se* $v = (3, 1)$, *a equação da recta de* $\mathbb{R}^2$ *que passa pela origem e tem vector director* v, *é*

$$(x_1, x_2) = \lambda(3, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

ou resumidamente

$$x = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se $v = (3, 1, 2)$ *(vector de* $\mathbb{R}^3$*), a recta de* $\mathbb{R}^3$ *que passa pela origem e tem vector director* v, *é*

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(3, 1, 2), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

ou resumidamente

$$x = \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Os planos e as rectas de $\mathbb{R}^n$, que passam pela origem têm duas propriedades muito interessantes:

1. Consideremos o plano de $\mathbb{R}^n$ cuja equação vectorial é

   $$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

   Designemos este plano por W.

Se x_1, x_2 são dois elementos do plano W, então existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$x_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

e existem $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$x_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2.$$

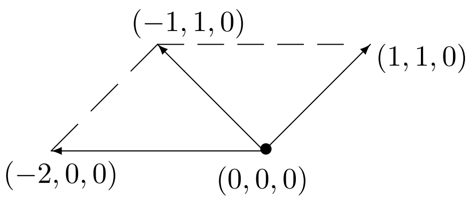
Mas então,

$$x_1 + x_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2.$$

Porque a soma de reais é um real, $x_1 + x_2$ é um elemento de W.

Por exemplo, no plano W de equação

$$x = \lambda_1(-2, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0),$$



os elementos $x_1 = (-2, 0, 0)$ e $x_2 = (1, 1, 0)$ estão em W e o elemento $x_1 + x_2 = (-1, 1, 0)$ também, e é a soma de (-2,0,0) com (1,1,0) ("Regra do Paralelogramo")

2. Com o mesmo plano de $\mathbb{R}^n$, W, e o mesmo elemento x_1, se k for um escalar então

$$kx_1 = k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (k\alpha_1)v_1 + (k\alpha_2)v_2,$$

isto é, kx_1 é um elemento de W.

Observação Como não fizemos restricções a v_1 e a v_2, a equação de W poderia ser uma equação da recta (caso em que um dos vectores é múltiplo do outro) ou simplesmente a origem (caso em que os vectores são nulos). Assim, tanto os planos como as rectas, ou a origem, verificam as 2 propriedades anteriores. Quanto à propriedade 1., quando verificada por um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, W, diz-se que W é fechado para a **soma de 2 quaisquer elementos de** W. Quando W verifica 2., diz-se que W é fechado para o **produto de um escalar por um elemento qualquer de** W.

Estamos em condições de definir subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.4 *Um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}^n$*,* W*, diz-se um* **subespaço vectorial de** $\mathbb{R}^n$*, ou simplesmente, subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *se:*

1. $\forall x_1, x_2 \in W, \quad x_1 + x_2 \in W$

2. $\forall k \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in W, \qquad kx_1 \in W.$

Já observámos que os planos de $\mathbb{R}^n$ que passam pela origem, as rectas de $\mathbb{R}^n$ que passam pela origem, o conjunto formado só pelo ponto zero de $\mathbb{R}^n$, denotado por $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e em que $0_{\mathbb{R}^n}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^n$, são todos subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$ (ao último chama-se subespaço nulo). Um outro subespaço de $\mathbb{R}^n$ é o próprio $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.5 *Se W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $0_{\mathbb{R}^n} \in W$.*

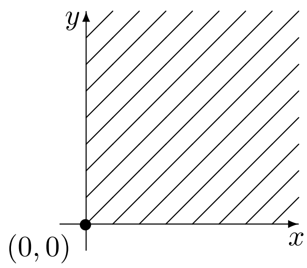
Demonstração Porque W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $W \neq \emptyset$. Seja x_1 um elemento de W. Atendendo à propriedade 2. da definição de subespaço e porque $0 \in \mathbb{R}$, $0x_1 \in W$. Mas $0x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$, isto é, $0_{\mathbb{R}^n} \in W$. $\square$

Observação

1. Na demonstração anterior quando escrevemos $0x_1 = 0_{\mathbb{R}^n}$, estão presentes 2 zeros. Do lado esquerdo da igualdade é o escalar 0 (0 elemento de $\mathbb{R}$) e do lado direito $0_{\mathbb{R}^n}$ ($(0, 0, \ldots, 0)$ elemento de $\mathbb{R}^n$).

2. Rectas ou planos de $\mathbb{R}^n$ que não passem pela origem, como o vector $0_{\mathbb{R}^n}$ não lhes pertence, pela Proposição 3.5, não são subespaços de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.6 *Sendo W o conjunto dos elementos (x_1, x_2)de $\mathbb{R}^2$ tais que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ (os elementos do primeiro quadrante do plano Oxy),*



facilmente se vê que W é fechado para a soma de 2 elementos quaisquer dele. Mas, $(1, 0) \in W$ e no entanto,

$$(-1)(1, 0) = (-1, 0) \notin W,$$

isto é, W não verifica 2. Logo, W não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Observação Por este exemplo podemos ver que um subconjunto W de $\mathbb{R}^n$ pode conter o vector $0_{\mathbb{R}^n}$ e não ser subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 3.7 *Se $AX = 0$ é um sistema homogéneo, então o seu conjunto-solução é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, onde n é o número de incógnitas do sistema.*

Observação Repare que se nos derem um sistema $AX = B$, não homogéneo, a solução nula, $X = 0$, nunca é solução do sistema. Assim, pela Proposição 3.5, o conjunto-solução deste sistema não é um subespaço.

Exemplo 3.8 *O conjunto*

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 3y + z = 0, \; y = 2x\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ porque é o conjunto-soluçao do sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Muitas vezes dão-nos um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Vejamos como encontrar um sistema de equações lineares cujo conjunto-solução seja o conjunto dado.

Exemplo 3.9 *Consideremos o conjunto*

$$W = \{(a + b, 6a + b, a) : \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Igualemos um vector genérico de W a um vector de $\mathbb{R}^3$, ou seja,

$$(a + b, 6a + b, a) = (x, y, z).$$

Daqui resulta o sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ 6a + b = y \\ a = z \end{cases}$$

O objectivo é determinarmos quando é que este sistema é possível (sistema nas incógnitas a, b). Ora a matriz ampliada do sistema é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 6 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right].$$

Calculemos uma matriz em forma de escada, a partir desta matriz.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 6 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - l_1)]{l_2 \to (l_2 - 6l_1)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -7 & y - 6x \\ 0 & -1 & z - x \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - \frac{1}{7} l_2)]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -7 & y - 6x \\ 0 & 0 & z - \frac{1}{7}y - \frac{1}{7}x \end{array}\right].$$

Portanto, o sistema é possível se

$$z - \frac{1}{7}y - \frac{1}{7}x = 0$$

que é a equação linear que define W, ou seja,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z - \frac{1}{7}y - \frac{1}{7}x = 0\}.$$

Como a equação linear que define W é uma equação linear homogénea, então W é um subespaço.

3.2 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Seja $AX = 0$ o sistema homogéneo em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Uma solução do sistema $AX = 0$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Seja $AX = 0$ um sistema homogéneo, na forma matricial. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $X = 0$ é solucão do sistema $AX = 0$.

   $\boxed{\text{B}}$ Se $X_1,\ X_2$ são solucões do sistema $AX = 0$, então $X_1 + X_2$ é solucão do sistema $AX = 0$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se Y é solucão do sistema $AX = 0$ e k é um escalar, então kY é solucão do sistema $AX = 0$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se Z é solucão do sistema $AX = 0$, então Z^T é solucão do sistema $AX = 0$.

3. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(2, a, 0) :\ a \in \mathbb{R}\} \\ T_2 &= \{(0,0,0),\ (0,0,1)\} \\ T_3 &= \{(0, a, b) :\ a, b \in \mathbb{R},\ a + b \geq 0\} \\ T_4 &= \{(a, 0, b) :\ a, b \in \mathbb{R},\ a = 3b\}. \end{aligned}$$

   Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ T_1, T_2, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ T_4 é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e T_1, T_2, T_3 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{C}}$ T_2, T_3, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_1 não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{D}}$ T_2, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_1, T_3 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(2a, a - 4b, 0) :\ a, b \in \mathbb{R}\} \\ T_2 &= \{(0,0,0)\} \\ T_3 &= \{(0, a - 2, a) :\ a \in \mathbb{R}\} \\ T_4 &= \{(a - 6b, b - a, b) :\ a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ T_1, T_2, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ T_4 é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e T_1, T_2, T_3 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{C}}$ T_1, T_2, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_3 não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{D}}$ T_2, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_1, T_3 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

5. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$T = \{(a, a + b, a - b + \alpha) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

   com $\alpha \in \mathbb{R}$.
   T é subespaço de $\mathbb{R}^3$ para:

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ $\alpha = 2$.

$\boxed{\text{C}}$ $\alpha = 3$.

$\boxed{\text{D}}$ $\alpha = 0$.

3.3 Subespaço Gerado

Vejamos mais subespaços de $\mathbb{R}^n$. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_s$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e W o conjunto de todas as combinações lineares destes vectores (Definição 1.17), isto é,

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_s v_s, \text{ com } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\}.$$

W é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$, pois se fizermos $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$ obtemos

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_s = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Isto é, $0_{\mathbb{R}^n}$ é elemento de W. Fazendo contas análogas às feitas para o plano de $\mathbb{R}^n$, concluímos que

1. Dadas duas combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_s$, a sua soma é outra combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_s$.
2. Multiplicando uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_s$ por um escalar, obtemos outra combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_s$.

Donde, W é subespaço de $\mathbb{R}^n$. E assim temos o resultado:

Teorema 3.10 *Se $v_1, v_2, \ldots, v_s$ são vectores de $\mathbb{R}^n$, então o conjunto de todas as combinações lineares*

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_s v_s, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Temos assim a possibilidade de construir um subespaço, a partir de um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.11 *O subespaço W de $\mathbb{R}^n$ de todas as combinações lineares dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$ de $\mathbb{R}^n$ é denominado por* **subespaço gerado** *por $v_1, v_2, \ldots, v_s$ e é denotado por*

$$W = \langle v_1, v_2, \ldots, v_s \rangle.$$

Neste caso dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ gera W.

Exemplo 3.12 1. *A recta de* $\mathbb{R}^2$ *que passa pela origem*

$$(x_1, x_2) = \lambda(3,1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

pode ser expressa como o subespaço de $\mathbb{R}^2$ *gerado pelo vector* $(3,1)$,

$$W = \langle(3,1)\rangle.$$

2. *Como já vimos* $\langle 0_{\mathbb{R}^n}\rangle$ *(subespaço gerado pelo vector nulo de* $\mathbb{R}^n$*) é* $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$*, ou seja,* $\langle 0_{\mathbb{R}^n}\rangle = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ *(subespaço nulo).*

3. *Sejam* $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *(estes vectores designam-se por* **vectores canónicos** *de* $\mathbb{R}^3$*). Como,*

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

qualquer que seja o elemento (x,y,z) *de* $\mathbb{R}^3$*, então,*

$$\langle e_1, e_2, e_3\rangle = \mathbb{R}^3.$$

Mais geralmente, se $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *forem os* **vectores canónicos** *de* $\mathbb{R}^n$*, isto é,* $e_1 = (1,0,\ldots,0),\ e_2 = (0,1,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,0,\ldots,1)$*, então*

$$\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle = \mathbb{R}^n.$$

Neste caso dizemos que o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *gera* $\mathbb{R}^n$.

Mostrámos que as possibilidades para os subespaços gerados de $\mathbb{R}^2$ são:

- subespaço nulo
- rectas que passam pela origem
- $\mathbb{R}^2$

e as possibilidades para os subespaços gerados de $\mathbb{R}^3$ são:

- subespaço nulo
- rectas que passam pela origem
- planos que passam pela origem
- $\mathbb{R}^3$

Já vimos que o conjunto-solução de um sistema homogéneo é um subespaço, vejamos como encontrar os vectores que geram o subespaço solução de um sistema homogéneo.

Exemplo 3.13 *Suponhamos que o conjunto-solução de determinado sistema homogéneo de $\mathbb{R}^4$ é*

$$\{(t_1+t_2, 2t_2, t_2-t_3, t_1) : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Porque cada elemento deste conjunto se escreve como combinação linear de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}(t_1+t_2, 2t_2, t_2-t_3, t_1) &= (t_1, 0, 0, t_1) + (t_2, 2t_2, t_2, 0) + (0, 0, -t_3, 0)\\ &= t_1(1,0,0,1) + t_2(1,2,1,0) + t_3(0,0,-1,0),\end{aligned}$$

então o subespaço solução é o subespaço

$$\langle (1,0,0,1), (1,2,1,0), (0,0,-1,0)\rangle.$$

Proposição 3.14 *Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $v_1, \ldots, v_s$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Então,*

$$W = \langle v_1, \ldots, v_s\rangle$$

se, e só se,

1. *$v_1, \ldots, v_s$ são vectores de W,*

2. *qualquer que seja o vector x de $\mathbb{R}^n$, x é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$.*

Exemplo 3.15 *O conjunto*

$$\{(1,0,2),\ (1,1,2),\ (1,1,3)\}$$

gera $\mathbb{R}^3$ porque os vectores pertencem a $\mathbb{R}^3$ e se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, existem $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(1,1,2) + \alpha_3(1,1,3) = (x,y,z).$$

Ou seja,

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3) = (x,y,z).$$

Daqui obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &= x\\ \alpha_2+\alpha_3 &= y\\ 2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3 &= z.\end{cases}$$

Este sistema na forma matricial é $AX = B$, em que $A = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\2&2&3\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ é um vector qualquer de $\mathbb{R}^3$, é sempre possível.

Discussão do sistema

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&1&1&y\\2&2&3&z\end{array}\right] \underset{l_3 \to (l_3-2l_1)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&1&1&y\\0&0&1&z-2x\end{array}\right].$$

Pelo que,

$$r(A) = 3 = r([A|B])$$

e o sistema é possível. Pela proposição anterior,

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,2),\ (1,1,2),\ (1,1,3) \rangle.$$

Repare que no caso de $\mathbb{R}^n$, para vermos se determinado conjunto de vectores, S, gera $\mathbb{R}^n$, basta mostrarmos que a característica da matriz cujas colunas são os vectores de S, é n,

3.4 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. O subespaço de $\mathbb{R}^3$,
$$T = \{(a, a-3b, a+b) :\ a, b \in \mathbb{R}\}$$
é gerado pelo conjunto de vectores:

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(1,0,0), (0,-2,0), (0,0,2)\}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(1,-2,2)\}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(1,1,1), (0,-3,1)\}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

2. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Um conjunto com 3 vectores de $\mathbb{R}^3$, gera $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ Um conjunto com 2 vectores de $\mathbb{R}^3$, pode gerar $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ gera $\mathbb{R}^3$, então o conjunto $\{v_1, v_2, v_1 + v_3\}$ também gera $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ gera $\mathbb{R}^3$ e k é um escalar, então o conjunto $\{kv_1, v_2, v_3\}$ também gera $\mathbb{R}^3$

3. Um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^3$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(1,1,1)\}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,-1)\}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$.

4. A forma geral dos vectores que pertencem ao subespaço de $\mathbb{R}^3$
$$< (1,2,2), (0,-1,1) >$$
é:

   $\boxed{\text{A}}$ $(a, b, 3c)$ com $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(a, 2a-b, 2a+b)$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(a, 2a, b)$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{D}}$ (a, a, b) com $a,\ b \in \mathbb{R}$.

5. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$W =< (1,2,2),(0,-1,1) > \qquad \text{e} \qquad U =< (1,0,4),(0,1,-1) >$$

então:

- $\boxed{\text{A}}$ $W \subset U$.
- $\boxed{\text{B}}$ $U \subset W$.
- $\boxed{\text{C}}$ $W = U$.
- $\boxed{\text{D}}$ $W \neq U$.

3.5 Dependência e Independência Linear

Como já mencionámos, dada a equação vectorial de $\mathbb{R}^n$

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

ela pode definir:

- um plano se os vectores v_1 e v_2 não tiverem a mesma direcção,
- uma recta se v_1 e v_2 tiverem a mesma direcção e não forem os dois nulos,
- o ponto zero se v_1 e v_2 forem o vector nulo.

Assim, vemos que as propriedades geométricas do subespaço de $\mathbb{R}^n$

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_s v_s, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R},$$

são afectadas pelas interligações dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$ de $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.16 *Dizemos que um conjunto, não vazio,* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ *de vectores de* $\mathbb{R}^n$ *é* **linearmente independente** *se os únicos escalares que satisfazem a equação*

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_s v_s = 0_{\mathbb{R}^n}$$

são $c_1 = 0$, $c_2 = 0$,..., $c_s = 0$.

Se existirem **escalares, não todos nulos**, *que satisfaçam esta equação, dizemos que o conjunto é* **linearmente dependente**.

Observação Apesar da definição anterior ser aplicada a um conjunto não vazio, muitas vezes dizemos que os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$ são linearmente independentes ou dependentes, para nos referirmos a que o conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ é linearmente independente ou dependente.

Proposição 3.17 *Um conjunto S de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenha o vector nulo é linearmente dependente.*

Demonstração Suponhamos que $S = \{0_{\mathbb{R}^n}, v_2, \ldots, v_s\}$. Porque,

$$1.0_{\mathbb{R}^n} + 0v_2 + \ldots + 0v_s = 0_{\mathbb{R}^n}$$

e o escalar que está associado ao vector nulo é $1 \neq 0$, então S é linearmente dependente. $\square$

Proposição 3.18 *Um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ de $\mathbb{R}^n$ com dois ou mais vectores é linearmente dependente se, e só se, pelo menos um dos vectores de S se escreve como combinação linear dos outros vectores de S.*

Demonstração Suponhamos que S é linearmente dependente. Então, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_s$, não todos nulos, tais que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_sv_s = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $c_1 \neq 0$. Então,

$$v_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)v_2 + \ldots + \left(-\frac{c_s}{c_1}\right)v_s.$$

Ou seja, v_1 escreve-se como combinação linear de $v_2, \ldots, v_s$.

Reciprocamente, suponhamos, sem perda de generalidade, que v_1 se escreve como combinação linear de $v_2, \ldots, v_s$. Assim, existem escalares $d_2, \ldots, d_s$ tais que

$$v_1 = d_2v_2 + \ldots + d_sv_s.$$

Mas isto implica que

$$1.v_1 + (-d_2)v_2 + \ldots + (-d_s)v_s = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Como o escalar associado a v_1 é $1 \neq 0$, temos que S é linearmente dependente. $\square$

Um processo para determinarmos se um conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, de vectores de $\mathbb{R}^n$, é linearmente independente é através de um sistema homogéneo de equações lineares. Consideramos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_s \end{bmatrix}$$

de tipo $n \times s$, cujas colunas são os vectores de S. Usando esta matriz, podemos reescrever a equação

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_sv_s = 0_{\mathbb{R}^n}$$

na forma matricial

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(sistema homogéneo cuja matriz simples do sistema é A).

O problema de determinar se S é linearmente independente reduz-se a determinar se o sistema anterior tem somente a solução nula (se o sistema tiver mais do que uma solução então, S é linearmente dependente).

Exemplo 3.19 *Vejamos se os vectores $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2)$, $v_3 = (1, 3, 2)$ são linearmente independentes e, caso não sejam, escrevamos o vector nulo de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear, não nula, de v_1, v_2, v_3.*

Como já dissemos, vamos ver se o sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

só tem a solução nula. Repare que as coordenadas dos vectores v_1, v_2, v_3 são as colunas da matriz simples do sistema. Ora, como a matriz ampliada de um sistema homogéneo tem a coluna, correspondente à matriz dos termos independentes, nula e transformações elementares nas linhas não alteram uma coluna nula, não necessitamos de colocar essa coluna para resolver o sistema. Temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to (l_2 - 2l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_3 \to (l_3 - 2l_2)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $r(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas do sistema $=$ número de vectores. Portanto, o sistema é possível e indeterminado, ou seja, os vectores são linearmente dependentes.

O sistema correspondente a esta última matriz é

$$\begin{cases} c_1 \quad +c_3 = 0 \\ \quad c_2 + c_3 = 0 \\ \qquad 0 = 0. \end{cases}$$

Tomando $c_3 = -1$ temos a solução $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$, ou seja,

$$1.v_1 + 1.v_2 - 1.v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

é uma combinação linear, não nula, do vector nulo.

Já dissemos que se A é uma matriz $n \times m$ com $m > n$, então, $r(A) < m$. Pelo que:

Proposição 3.20 *Seja S um conjunto de $\mathbb{R}^n$ com m vectores em que $m > n$. Então S é linearmente dependente.*

Exemplo 3.21 *Consideremos os vectores de $\mathbb{R}^4$, $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$, $v_4 = (1, 1, 0, 0)$, $v_5 = (-1, 3, 2, 0)$. Pela* Proposição *anterior, como v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 são 5 vectores de $\mathbb{R}^4$, então são linearmente dependentes.*

3.6 Aplicações

Vejamos uma aplicação do conceito de independência linear.

3.6.1 Som de Alta Fidelidade

O som de alta fidelidade pode ser gravado digitalmente, através de uma onda sonora à taxa de 44100 vezes por segundo. Assim, um segmento de 10 segundos pode ser representado por um vector de $\mathbb{R}^{441000}$. Um técnico de som num festival de jazz planeia gravar vectores de som com 2 microfones, um vector de som s, através de um microfone colocado perto do saxofone e um vector de som g, através de um microfone colocado perto da guitarra. Já no estúdio de som, ele faz a mistura, criando uma combinação linear dos 2 vectores de som, que produz o efeito sonoro desejado. Suponhamos que cada microfone além de captar o som do instrumento próximo, também grava uma pequena quantidade de som do outro instrumento, de forma que os reais vectores de som gravados são

$u = s + 0,05g$ para o microfone perto do saxofone,
$v = g + 0,12s$ para o microfone perto da guitarra.

Qual a combinação linear de u e v que recria a mistura $\frac{1}{2}(s+g)$?

Pretendemos encontrar escalares λ_1 e λ_2 tais que

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = \frac{1}{2}(s+g)$$

($\frac{1}{2}(s+g)$ como combinação linear de u e v). Porque $u = s + 0,05g$ e $v = g + 0,12s$, vem que

$$\lambda_1(s + 0,05g) + \lambda_2(g + 0,12s) = \frac{1}{2}(s+g)$$

ou seja,

$$\left(\lambda_1 + 0,12\lambda_2 - \frac{1}{2}\right) s + \left(0,05\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2}\right) g = 0.$$

Como s e g são vectores linearmente independentes (cada instrumento emite o seu som),

$$\lambda_1 + 0,12\lambda_2 - \frac{1}{2} = 0 \qquad 0,05\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Ou seja, o sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + 0,12\lambda_2 = \frac{1}{2} \\ 0,05\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pelo que,

$$\lambda_1 = \frac{0,45}{0,994}, \qquad \lambda_2 = \frac{0,443}{0,994}.$$

3.7 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

   $\boxed{\text{A}}$ O conjunto de todas as combinações lineares de 2 vectores u, v de $\mathbb{R}^n$, linearmente independentes é um plano.

   $\boxed{\text{B}}$ Um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contenha $n+1$ vectores é linearmente dependente.

   $\boxed{\text{C}}$ Qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com um único vector é linearmente independente.

   $\boxed{\text{D}}$ Se $\{u,\ v\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então o conjunto $\{u+v,\ v\}$ também é linearmente independente.

2. O conjunto formado pelos vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = (1,0,5),\ v_2 = (2,2,10),\ v_3 = (0,1,a),$$

   é um conjunto de vectores linearmente dependente para

   $\boxed{\text{A}}$ $a = 1$.

   $\boxed{\text{B}}$ $a = 0$.

   $\boxed{\text{C}}$ $a = 2$.

   $\boxed{\text{D}}$ $a = 3$.

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se três vectores, não nulos, de $\mathbb{R}^n$, formam um conjunto linearmente dependente, então cada vector do conjunto pode ser escrito como combinação linear dos outros dois.

   $\boxed{\text{B}}$ O conjunto de todas as combinações lineares de dois vectores v e u de $\mathbb{R}^n$ é um plano.

   $\boxed{\text{C}}$ Se u não se pode escrever como combinação linear de v e w, então os três vectores são linearmente independentes.

   $\boxed{\text{D}}$ Um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que contém o vector nulo é linearmente dependente.

4. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então, para qualquer escalar não nulo k, o conjunto $\{ku, kv, kw\}$ também é linearmente independente.

   $\boxed{\text{B}}$ Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então, o conjunto $\{u+v, v+w, w\}$ também é linearmente independente.

   $\boxed{\text{C}}$ Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então, o conjunto $\{u, v\}$ também é linearmente independente.

   $\boxed{\text{D}}$ Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, então, o conjunto $\{u-v, v-w, w-u\}$ também é linearmente independente.

3.8 Exercícios

1. Diga porque razão os seguintes conjuntos não são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$:

   a) $\{(1,a) : a \in \mathbb{R}\}$.

   b) $\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R} \text{ e } ab \geq 0\}$.

c) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ e $a \geq -b\}$.

d) $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}$ e $a \geq b - 2,\ a \leq b + 2\}$.

2. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

   a) $\{(0, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.

   b) $\{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}_0^+\}$.

   c) $\{(1, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.

   d) o conjunto dos vectores da forma (a, b, c) com $c = a - 2b$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   e) $\{(a, b, c) : b + a = 1$ e $a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

3. Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

   a) $\{(0, a, 0, 1) : a \in \mathbb{R}\}$.

   b) $\{(0, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}^+\}$.

   c) $\{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b = a + d, c = 2a - b\}$.

   d) o conjunto dos vectores da forma (a, b, c, d) com $c = a - 2b$, $d = b + a - c$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   e) $\{(a, b, c, d) : b + a = 1$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

4. Escreva a forma geral dos vectores que pertencem ao subespaço $< (1, 0, -2), (1, 1, 1) >$.

5. Sem fazer contas, determine se u é um vector do subespaço $< v >$:

   a) $u = (1, -1, -3)$, $v = (-3, 3, 9)$.

   b) $u = (1, 2, -3, 0)$, $v = (2, 4, -6, 9)$.

6. Dê exemplo de um vector de $\mathbb{R}^4$ que não pertença ao subespaço $< (1, 1, 2, 4), (0, 2, 0, 4) >$.

7. Encontre uma solução geral do sistema de equações lineares e obtenha um conjunto de vectores que gerem o conjunto-solução:

   a) $\begin{cases} \text{x+6y+2z-5w=0} \\ \text{-x-6y-2z-3w=0} \\ \text{2x+12y+ 5z-18w=0} \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \text{x+y-z=0} \\ \text{-2x-2y+2z=0} \\ \text{-x-y+z=0} \end{cases}$

   c) $\begin{cases} \text{x+y-z=0} \\ \text{-2x-y+2z=0} \\ \text{-x+y+z=0} \end{cases}$

8. Encontre um conjunto de vectores geradores do subespaço

   $$W = \{(a, 0, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$

   Que figura geométrica é W?

9. Encontre um conjunto de vectores geradores do subespaço

   $$W = \{(a, b, 2a, 3b, -a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

   Que figura geométrica é W?

10. Quais dos seguintes conjuntos de vectores gera $\mathbb{R}^3$?

    a) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

    b) $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

c) $\{(1,1,0),(1,1,-1),(1,1,1)\}$.

d) $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(2,1,1)\}$.

11. Determine que figura geométrica é representada pela equação:

    a) $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda_1(2,1,6,8)+\lambda_2(0,2,3,4)$.

    b) $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda_1(0,-4,-6,-8)+\lambda_2(0,2,3,4)$.

    c) $(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda_1(0,0,0,0)+\lambda_2(1,-2,3,4)$.

12. Determine se os vectores seguintes são linearmente independentes:

    a) $v_1=(1,5,7)$, $v_2=(3,-2,4)$.

    b) $v_1=(-1,0,1)$, $v_2=(3,0,-3)$.

    c) $v_1=(0,5,1)$, $v_2=(3,0,2)$, $v_3=(-3,10,0)$.

    d) $v_1=(0,5,1)$, $v_2=(3,0,2)$, $v_3=(-3,5,-2)$.

    c) $v_1=(9,-5,4)$, $v_2=(-3,5,3)$, $v_3=(-3,1,1)$, $v_4=(0,0,1)$.

13. a) Mostre que os vectores $v_1=(1,2,2,2)$, $v_2=(0,3,1,2)$ e $v_3=(-1,1,-1,0)$ formam um conjunto linearmente dependente.

    b) Escreva cada um dos vectores como combinação linear dos outros dois.

14. Encontre a tal que o conjunto formado pelos vectores $(2,2,1)$, $(2,0,a)$ e $(0,1,a)$ seja linearmente dependente.

15. Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^n$. Mostre que os vectores $u-v$, $v-w$ e $w-u$ formam um conjunto de vectores linearmente dependente.

Capítulo 4

DETERMINANTES

Ao longo deste capítulo veremos uma outra maneira de determinar se uma matriz quadrada é ou não invertível, aprenderemos um outro processo de resolver sistemas de n equações a n incógnitas, calcularemos áreas de paralelogramos (em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$) e volumes de paralelepípedos (em $\mathbb{R}^3$).

Todos estes assuntos resolvem-se usando "**DETERMINANTES**".

4.1 Definição de Determinante

Além da definição de determinante de uma matriz quadrada, ao longo desta secção veremos exemplos do cálculo do determinante de certas matrizes.

Notação 4.1 *Sejam A uma matriz de ordem n $(n \geq 2)$ e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, denotamos por*

$$A(i|j)$$

a matriz que resulta de A retirando a linha i e a coluna j.

Observação Repare-se que se A é uma matriz de ordem n então $A(i|j)$ é uma matriz quadrada de ordem $n-1$.

Exemplo 4.2 *Sendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$*, então*

$$A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

matriz que resulta da matriz A retirando a primeira linha e a segunda coluna.

$$A(3|1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

matriz que resulta da matriz A retirando a terceira linha e a primeira coluna.

Definição 4.3 *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos* **determinante** *de A, e denotamos por $\det A$ ou $|A|$, ao número*

- *Se $n = 1$, então*
$$\det A = a_{11}.$$
- *Se $n > 1$, então*
$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + \ldots + a_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1|n),$$
ou seja, se $n > 1$,
$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i} \det A(1|i).$$

Exemplo 4.4 1. *Se A for uma matriz de ordem 2, isto é,*
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
então,
$$\det A = a_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2} \det A(1|2).$$
Porque $A(1|1) = a_{22}$ e $A(1|2) = a_{21}$ vem que
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
(Uma forma de fixar a expressão do determinante de uma matriz de ordem 2, é pensar que é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da outra diagonal, isto é, se
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
então
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.)$$

ATENÇÃO: *Esta regra só é válida para matrizes de ordem 2!!!*

2. *Se A for uma matriz de ordem 3, isto é,*
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

então,

$$\begin{aligned}
\det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) + a_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3)\\
&= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}\\
&= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}).
\end{aligned}$$

Para fixar esta expressão, recorramos à **REGRA de SARRUS***:*

coloquemos as 3 *colunas da matriz* A *e repitamos as* 2 *primeiras colunas, isto é,*

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

Desenhando todas as diagonais possíveis, com 3 *elementos cada, obtemos o esquema da figura.*

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

O determinante da matriz é a soma do produto dos 3 *elementos de cada diagonal cuja seta vai da esquerda para a direita, menos a soma do produto dos* 3 *elementos de cada diagonal cuja seta vai da direita para a esquerda.*

ATENÇÃO: *Esta regra só é válida para matrizes de ordem* 3*!!!*

4.2 Teorema de Laplace

Como se vê, se a expressão do determinante de uma matriz de ordem 3 envolve 6 parcelas, então a do determinante de uma matriz de ordem 4 terá 24 parcelas, o que torna o processo muitas vezes complicado e moroso. Vejamos, então, outros processos para calcular o determinante.

Definição 4.5 *Seja* A *uma matriz de ordem* n*, com* $n \geq 2$*. Chamamos* **complemento algébrico** *do elemento da posição* (i, j) *de* A*, e denotamos por* $\widehat{A}_{ij}$*, o elemento*

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i|j).$$

Exemplo 4.6 *Sendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, *então*

$$\widehat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(20+9) = -29,$$

$$\widehat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det A(3|1) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2.$$

Teorema 4.7 (Teorema de Laplace) *Sejam* $A = [a_{ij}]$ *uma matriz quadrada de ordem* n, $n \geq 2$ *e* $k \in \{1, \ldots, n\}$, *então*

1) $\det A = a_{k1}\widehat{A}_{k1} + \ldots + a_{kn}\widehat{A}_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\widehat{A}_{kj}$.

2) $\det A = a_{1k}\widehat{A}_{1k} + \ldots + a_{nk}\widehat{A}_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\widehat{A}_{ik}$.

Observação Em 1), do Teorema de Laplace, faz-se o desenvolvimento do cálculo do determinante, através da linha k e em 2), o desenvolvimento é feito através da coluna k.

Na prática, quando estamos a calcular o determinante de uma matriz, escolhemos a linha ou a coluna da matriz que tenha maior número de zeros, pois teremos menos parcelas no cálculo do determinante, através do Teorema de Laplace.

A definição de determinante de uma matriz quadrada A é o desenvolvimento do determinante, usando o Teorema de Laplace, através da primeira linha da matriz A.

Exemplo 4.8 *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,
como a segunda coluna e a terceira linha de A *têm duas posições iguais a zero, vamos escolher uma delas para calcularmos o determinante de* A.
Através da segunda coluna, pela expressão 2) *do* Teorema 4.7 *temos*

$$\begin{aligned} \det A &= 0\widehat{A}_{12} - 2\widehat{A}_{22} + 0\widehat{A}_{32} = -2(-1)^{2+2} \det A(2|2) \\ &= -2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -2(3-0) = -6 \end{aligned}$$

Para comprovarmos que o valor do determinante da matriz A *é o mesmo se utilizarmos o Teorema de Laplace com qualquer uma das linhas ou colunas de* A, *vamos calcular o determinante de* A, *através da terceira linha de* A.
Assim, usando a expressão 1) *do Teorema de Laplace, temos*

$$\begin{aligned} \det A &= 0\widehat{A}_{31} + 0\widehat{A}_{32} + 3\widehat{A}_{33} = 3(-1)^{3+3} \det A(3|3) \\ &= 3(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2-0) = -6 \end{aligned}$$

Se tivessemos utilizado a definição de determinante, teríamos o desenvolvimento através da primeira linha de A, ou seja,

$$\begin{aligned} \det A &= 1\widehat{A}_{11} + 0\widehat{A}_{12} - 1\widehat{A}_{13} = 1(-1)^{1+1} \det A(1|1) - 1(-1)^{1+3} \det A(1|3) \\ &= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(-6-0) - 1(0-0) = -6 \end{aligned}$$

Como consequência do Teorema de Laplace surge o seguinte corolário.

Corolário 4.9 *Seja A uma matriz, quadrada de ordem n, com uma linha ou uma coluna nula, então* $\det A = 0$.

Vejamos outras consequências do Teorema de Laplace.

Proposição 4.10 *Seja A uma matriz, quadrada de ordem n, triangular superior (respectivamente, triangular inferior), então o determinante de A é o produto dos elementos da diagonal principal.*

Demonstração A demonstração deste resultado faz-se por indução em n.
Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular superior de ordem n.

Para $n = 1$, temos $\det A = a_{11}$, que é o produto dos elementos da sua diagonal principal.

Suponhamos que o resultado se verifica para qualquer matriz triangular superior de ordem $k-1$, em que $k-1 \geq 1$. Consideremos uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem k.
Recorde-se que se A é triangular superior então

$$a_{k1} = 0, \ldots, a_{k,k-1} = 0.$$

Se fizermos o desenvolvimento do determinante de A, pela linha k, usando o Teorema de Laplace (Teorema 4.7), temos

$$\det A = a_{kk}\widehat{A}_{kk} = a_{kk}(-1)^{k+k} \det A(k|k).$$

Dado que $A(k|k)$ é triangular superior, mas de ordem $k-1$, pela hipótese de indução temos que

$$\det A(k|k) = a_{11}a_{22} \ldots a_{k-1,k-1}.$$

Assim,

$$\det A = a_{kk}\widehat{A}_{kk} = a_{11}a_{22} \ldots a_{k-1,k-1}a_{kk}.$$

Usando o Princípio de Indução, concluímos o resultado. □

Outro resultado que se demonstra usando o Princípio de Indução é o seguinte:

Proposição 4.11 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, então,*

$$\det A^T = \det A.$$

Demonstração Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n.

Se $n = 1$, então $A^T = a_{11} = A$, pelo que $\det A^T = \det A$.

Suponhamos que o resultado é verdadeiro para qualquer matriz de ordem $k-1$, com $k-1 \geq 1$, e seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem k.

Porque as linhas de A^T são as colunas de A, fazendo o desenvolvimento do determinante de A^T pela primeira linha, temos

$$\begin{aligned}\det A^T &= (A^T)_{11}\widehat{A^T}_{11} + \ldots + (A^T)_{1k}\widehat{A^T}_{1k} \\ &= a_{11}\widehat{A^T}_{11} + \ldots + a_{k1}\widehat{A^T}_{1k}.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\widehat{A^T}_{1i} &= (-1)^{1+i}\det A^T(1|i) \\ &= (-1)^{1+i}\det(A(i|1))^T \\ &= (-1)^{1+i}\det A(i|1) \qquad \text{(por hipótese de indução)} \\ &= \widehat{A}_{i1}\end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}\det A^T &= a_{11}\widehat{A}_{11} + \ldots + a_{k1}\widehat{A}_{k1} \\ &= \det A \qquad \text{(desenvolvimento do determinante pela 1}^{\text{a}}\text{ coluna de } A).\end{aligned}$$

Usando o Princípio de Indução, concluímos o resultado. □

Proposição 4.12 *Seja A uma matriz, quadrada de ordem $n \geq 2$, com duas linhas iguais, então*

$$\det A = 0.$$

Demonstração A demonstração deste resultado faz-se por indução em n.

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular superior de ordem $n \geq 2$.

Para $n = 2$, como A tem duas linhas iguais, temos $\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$. Assim, $\det A = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$.

Suponhamos que o resultado se verifica para qualquer matriz de ordem $k-1 \geq 2$, com duas linhas iguais. Consideremos uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem k, com as linhas i e j iguais.

Fazendo o desenvolvimento do determinante ao longo da linha l (usando o Teorema de Laplace (Teorema 4.7)), com $l \neq i$, $l \neq j$, temos

$$\det A = a_{l1}\widehat{A}_{l1} + \ldots + a_{lk}\widehat{A}_{lk}.$$

Dado que $A(l|s)$ tem duas linhas iguais (as linhas correspondentes às linhas i e j de A), por hipótese de indução temos que

$$\det A(l|s) = 0 \qquad s = 1, \ldots, k.$$

Assim,

$$\det A = 0.$$

Usando o Princípio de Indução, concluímos o resultado. □

4.3 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. $A(3|1)$ é a matriz:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz B é:

   $\boxed{\text{A}}$ 9

   $\boxed{\text{B}}$ -4

   $\boxed{\text{C}}$ 3

   $\boxed{\text{D}}$ -1

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. $\widehat{A}_{12}$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ 12.

   $\boxed{\text{B}}$ -12.

   $\boxed{\text{C}}$ 4.

   $\boxed{\text{D}}$ -4.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\det A = \det B + \det C$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\det A = (\det B)(\det C)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\det A = \det B - \det C$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\det A = -\det B + \det C$.

5. Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$, com $|A| \neq 0$, hemi-simétrica. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $|A| = -|A^T|$.

   $\boxed{\text{B}}$ $|A + A^T| \neq 0$.

   $\boxed{\text{C}}$ A não é uma matriz triangular superior.

   $\boxed{\text{D}}$ $\widehat{A^T}_{12} = -\widehat{A}_{21}$.

6. Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$, com $|A| = 0$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ A pode ter duas colunas iguais.

   $\boxed{\text{B}}$ A pode ter duas linhas iguais.

   $\boxed{\text{C}}$ A pode ter uma linha não nula.

   $\boxed{\text{D}}$ A pode ser a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4.4 Determinante e Transformações Elementares

O Teorema seguinte mostra as alterações que as transformações elementares nas linhas de uma matriz de ordem n, provocam ao seu determinante.

Teorema 4.13 *Seja A uma matriz de ordem n. Então*

1. *Se B é a matriz que resulta de A multiplicando uma linha de A pelo escalar k,*

$$\det B = k \det A.$$

2. *Se B é a matriz que resulta de A somando um múltiplo de uma linha de A a uma outra,*

$$\det B = \det A.$$

3. *Se B é a matriz que resulta de A trocando duas linhas de A,*

$$\det B = -\det A.$$

Demonstração

1. Suponhamos que é a linha i de A que foi multiplicada por k para obtermos B. Fazendo o desenvolvimento do determinante de B pela linha i (Teorema de Laplace) e partindo do princípio que $A = [a_{ij}]$ temos
$$\det B = (ka_{i1})\widehat{B}_{i1} + \ldots + (ka_{in})\widehat{B}_{in}.$$
Porque as outras linhas de B são as de A, vem que
$$\det B = k(a_{i1}\widehat{A}_{i1} + \ldots + a_{in}\widehat{A}_{in}) = k \det A.$$

2. Suponhamos que para obter B efectuámos a transformação elementar $l_i \longrightarrow (l_i + kl_j)$. Então, sendo $A = [a_{ij}]$, se efectuarmos o desenvolvimento do determinante de B pela sua linha i (Teorema de Laplace) temos
$$\begin{aligned} \det B &= (a_{i1} + ka_{j1})\widehat{B}_{i1} + \ldots + (a_{in} + ka_{jn})\widehat{B}_{in} \\ &= (a_{i1}\widehat{B}_{i1} + \ldots + a_{in}\widehat{B}_{in}) + k(a_{j1}\widehat{B}_{i1} + \ldots + a_{jn}\widehat{B}_{in}). \end{aligned}$$
Como retirando a linha i de B obtemos uma matriz igual à matriz A retirando a linha i, vem que
$$\det B = (a_{i1}\widehat{A}_{i1} + \ldots + a_{in}\widehat{A}_{in}) + k(a_{j1}\widehat{A}_{i1} + \ldots + a_{jn}\widehat{A}_{in}).$$
Sendo C a matriz que se obtém de A substituindo a sua linha i, pela sua linha j, então
$$\det B = \det A + k \det C.$$
Repare-se que C é a matriz,
$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \\ \quad \text{linhas } i \text{ e } j \\ \leftarrow \\ \\ \\ \end{array}$$
que tem as linhas i e j iguais. Pela Proposição 4.12, $\det C = 0$ e
$$\det B = \det A.$$

3. Suponhamos, sem perda de generalidade, que trocámos as linhas i e j, com $i < j$, de A para obtermos B, ou seja,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{linha } j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Seja D a matriz que resulta de A efectuando a transformação elementar $l_i \to (l_i + l_j)$, seja F a matriz que resulta de D efectuando a transformação elementar $l_j \to (l_j - l_i)$ e seja G a matriz que resulta de F efectuando a transformação elementar $l_i \to (l_i + l_j)$. Assim,

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \cdots & a_{in} + a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Repare-se que a matriz G se obtem da B multiplicando a linha j por -1. Usando 1., $\det G = -\det B$.

Usando 2., $\det G = \det F = \det D = \det A$.

Assim,

$$\det B = -\det A.$$

□

Este Teorema dá-nos um processo de calcularmos o determinante de uma matriz: através de transformações elementares, conseguimos obter uma matriz triangular e como sabemos calcular o determinante de uma matriz triangular (Proposição 4.10), usando o Teorema anterior temos o determinante da matriz inicial.

Exemplo 4.14 *Se* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$*, então vamos calcular o determinante de* A *usando o* Teorema 4.13 *e depois a* Proposição 4.10.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_1 \leftrightarrow l_3 \\ \uparrow \\ \textit{trocámos} \\ \textit{linhas, por } 3.}}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_1 \to \frac{1}{2} l_1 \\ \uparrow \\ \textit{mult. uma linha} \\ \textit{por } \frac{1}{2}, \textit{ por } 1.}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{l_2 \to (l_2 - l_1) \\ \uparrow \\ \textit{por } 2.}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_3 \to (l_3 + l_2) \\ \uparrow \\ \textit{por } 2.}}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{determinante de} \\ \textit{matriz triang.}}}{=} -2(-4) = 8$$

4.5 Outra Caracterização das Matrizes Invertíveis

No capítulo 2, vimos diversas caracterizações das matrizes invertíveis. Usando o determinante iremos conhecer um outro processo, de verificação da invertabilidade de uma matriz.

Teorema 4.15 *Seja A uma matriz quadrada.*
A é invertível se, e só se, $\det A \neq 0$.

Demonstração Suponhamos que A tem ordem n e que é invertível. Então pelo Teorema 2.40, a forma de escada reduzida de A é I_n. Atendendo ao Teorema 4.13 (I_n foi obtida a partir de A efectuando um número finito de transformações elementares em que nenhuma delas é multiplicar uma linha pelo escalar zero) e porque $\det I_n \neq 0$, então $\det A \neq 0$.

Reciprocamente, se $\det A \neq 0$ e se R é a forma de escada reduzida de A, então pelo Teorema 4.13, $\det R \neq 0$. Pelo Corolário 4.9, R não tem linhas nulas, pelo que $R = I_n$. Pelo Teorema 2.40, A é invertível. □

Vejamos um processo de calcular a inversa de uma matriz invertível, usando o determinante.

Definição 4.16 *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$.*

Chamamos **matriz dos complementos algébricos** *de A à matriz dos seus complementos algébricos e denotamo-la por $\widehat{A}$.*

Chamamos **adjunta** *de A à matriz transposta da matriz $\widehat{A}$ e denotamo-la por adj A, isto é,*

$$(adj\ A)_{ij} = \widehat{A}_{ji}.$$

Exemplo 4.17 *Se* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *então para calcularmos a matriz adjunta de* A*, temos de calcular a matriz dos complementos algébricos de* A*. Ora*

$$\widehat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \det A(1|1) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2-0) = 2$$

$$\widehat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+6) = -5$$

$$\widehat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \det A(1|3) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (0+4) = 4$$

$$\widehat{A}_{21} = (-1)^{2+1} \det A(2|1) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1$$

$$\widehat{A}_{22} = (-1)^{2+2} \det A(2|2) = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (0-0) = 0$$

$$\widehat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \det A(2|3) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$$

$$\widehat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det A(3|1) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-0) = 3$$

$$\widehat{A}_{32} = (-1)^{3+2} \det A(3|2) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-0) = 0$$

$$\widehat{A}_{33} = (-1)^{3+3} \det A(3|3) = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (0+1) = 1$$

Assim, pela definição, porque

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{23} \\ \widehat{A}_{31} & \widehat{A}_{32} & \widehat{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e porque

$$(\widehat{A})^T = adj\ A,$$

vem que

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.18 *Seja* A *uma matriz quadrada de ordem* n*. Então*

1. $A.adj\ A = (\det A)I_n$*.*

2. *Se* A *é invertível, então* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A$*.*

Demonstração

1. Sendo $A = [a_{ij}]$ então $adj\ A = [\widehat{A}_{ij}]^T = [\widehat{A}_{ji}]$. Usando o facto de $(A.adj\ A)_{ij}$ ser o produto da i-ésima matriz linha de A pela j-ésima matriz coluna de $adj\ A$, vem que o elemento da posição (i,i) de $A.adj\ A$ é

$$a_{i1}\widehat{A}_{i1} + \ldots + a_{in}\widehat{A}_{in}.$$

Pelo Teorema de Laplace isto é o desenvolvimento do $\det A$.

O elemento da posição (i, j) de $A.adj\ A$ é (em que $i \neq j$)

$$a_{i1}\widehat{A}_{j1} + \ldots + a_{in}\widehat{A}_{jn}.$$

Pelo Teorema de Laplace isto é o desenvolvimento do determinante da matriz C que se obtém de A substituindo a linha j de A, pela sua linha i. Atendendo à Proposição 4.12, porque C tem duas linhas iguais, $\det C = 0$. Donde, obtemos o resultado.

2. Se A é invertível, existe A^{-1}. Por 1.,

$$A.adj\ A = (\det A)I_n.$$

Donde,

$$A^{-1}(A.adj\ A) = A^{-1}(\det A)$$

ou seja, porque pelo Teorema 4.15, $\det A \neq 0$, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A.$$

$\square$

Exemplo 4.19 *Usando a matriz do* Exemplo 4.17*, porque* $\det A = -5 \neq 0$*, então* A *é invertível e pelo* Teorema 4.18*,*

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.6 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

   Indique qual a afirmação **FALSA**:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{9}{2}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

D $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

2. Seja $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. A entrada $(3,2)$ da matriz $adj(B)$ é:

   A -1

   B 4

   C -4

   D 1

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$. Para que valores de a a matriz é invertível?

   A Para $a = 3$ ou $a = -1$.

   B Para qualquer valor real.

   C Para $a = 3$.

   D Para qualquer valor real excepto 3 e -1.

4. Seja A uma matriz de ordem n. Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**.

   A Se A é invertível então o seu determinante é diferente de zero. A recíproca desta afirmação é verdadeira.

   B A matriz A é invertivel se, e só se, o seu determinante é igual a zero.

   C A matriz A é invertivel se, e só se, o seu determinante é diferente de zero.

   D Se o determinante de A é diferente de zero então A é invertível. A recíproca desta afirmação é verdadeira.

5. Sejam A, B matrizes de ordem n, com n par. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se $|A| \neq 0$, então A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.

   B Se B se obtem de A trocando duas linhas, então $|A| = |-B|$.

   C Se A pode escrever-se como produto de matrizes elementares, então $|A| \neq 0$.

   D Se B se obtem de A multiplicando uma linha pelo escalar, não nulo, k, então $|A| = \frac{1}{k}|B|$.

6. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se A é uma matriz de ordem n, então $A\ adj(A)$ é uma matriz diagonal.

   B Se A é uma matriz de ordem n invertível, então a $adj(A)$ também é invertível.

   C Se A é uma matriz de ordem $n > 2$ e $|A| = 2$, então $|adj(A)| = 2$.

   D Se A é uma matriz de ordem n com uma linha nula, então a $adj(A)$ também tem uma coluna nula.

4.7 Sistemas de Cramer

Dado um sistema de n equações a n incógnitas, ele pode escrever-se na forma matricial por

$$AX = B.$$

Se A for invertível, então $r(A) = r([A|B]) = n$ e o sistema é possível e determinado (estes sistemas são chamados **Sistemas de Cramer**). O Teorema seguinte diz-nos como calcular a única solução deste sistema usando determinantes.

Teorema 4.20 (**Regra de Cramer**) *Seja $AX = B$ um sistema de n equações a n incógnitas, tal que, A é invertível. A única solução do sistema é*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad \ldots \qquad , x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

em que A_j é a matriz que resulta substituindo a j-ésima coluna de A por B.

Demonstração Sendo $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, como A é invertível então, de $AX = B$, obtemos $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, ou seja, $X = A^{-1}B$. Porque

$$A^{-1}B = \left(\frac{1}{\det A} adj\ A\right) B = \frac{1}{\det A}\left((adj\ A)B\right),$$

então

$$x_j = \frac{1}{\det A}\left((adj\ A)B\right)_{j1} = \frac{1}{\det A}(b_1\widehat{A}_{1j} + \ldots + b_n\widehat{A}_{nj}).$$

Pelo Teorema de Laplace,

$$x_j = \frac{1}{\det A}\det A_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

□

Exemplo 4.21 *O sistema* $\begin{cases} 3x + 3y + z = 4 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ *é tal que a matriz simples é*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz dos termos independentes é

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Porque $\det A = -3 \neq 0$, *então* A *é invertível. Pelo* Teorema 4.20*,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = 0, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = 1.$$

4.8 Determinante do Produto de Matrizes

Observemos, em primeiro lugar, o que acontece ao determinante de uma matriz, quando esta é multiplicada à esquerda por uma matriz elementar. Pelo Teorema 4.13 concluímos o seguinte lema.

Lema 4.22 *Seja E uma matriz elementar de ordem n e B uma matriz de ordem n.*

1. *Se E se obtém multiplicando uma linha de I_n por k, então*
$$\det E = k \qquad e \qquad \det(EB) = \det E . \det B.$$
2. *Se E se obtém trocando duas linhas de I_n, então*
$$\det E = -1 \qquad e \qquad \det(EB) = \det E . \det B.$$
3. *Se E se obtém somando um múltiplo de uma linha de I_n a outra linha, então*
$$\det E = 1 \qquad e \qquad \det(EB) = \det E . \det B.$$

Lema 4.23 *Sejam A e B matrizes de ordem n.*

1. *Se $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, então A e B são invertíveis.*
2. *Se AB é invertível então A e B são invertíveis.*

Demonstração

1. Suponhamos que $AB = I_n$. Para mostrarmos que A é invertível, vamos ver que o sistema homogéneo $BX = 0$ é possível e determinado. Seja X uma solução do sistema $BX = 0$, então
$$X = I_n X \underset{\substack{\uparrow \\ AB=I_n}}{=} (AB)X = A(BX) = A0 = 0,$$
isto é, a única solução do sistema é a solução nula. Pelo Corolário 1.22, $r(B) = n$. Então B é invertível. Assim,
$$A = AI_n = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} = B^{-1},$$
isto é, A é invertível.

2. Se AB é invertível, então

$$I_n = (AB)(AB)^{-1} = A(B(AB)^{-1}).$$

Por 1., A é invertível. Mas também,

$$I_n = (AB)^{-1}(AB) = ((AB)^{-1}A)B.$$

Por 1., B é invertível. □

Teorema 4.24 *Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Então,*

$$\det(AB) = \det A. \det B.$$

Demonstração Se A não é invertível, pelo Lema anterior, AB não é invertível. Porque $\det A = 0$, $\det(AB) = 0$, vem que

$$\det(AB) = \det A. \det B.$$

Se A é invertível, então A pode escrever-se como produto de matrizes elementares, ou seja,

$$A = E_1 E_2 \dots E_s.$$

Assim, usando o Lema 4.22

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1((E_2 \dots E_s)B)) = \det E_1. \det((E_2 \dots E_s)B) \\
&= \dots = \det E_1. \det E_2 \dots \det E_s. \det B = \det(E_1 E_2 \dots E_s). \det B \\
&= \det A. \det B.
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.25 *Seja A uma matriz de ordem n. Se A é invertível então*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Demonstração Porque A é invertível, $A^{-1}A = I_n$. Usando o Teorema anterior temos que

$$\det(A^{-1}A) = \det A^{-1}. \det A.$$

Pela Proposição 4.10,

$$\det I_n = 1.$$

Donde,

$$\det A^{-1}. \det A = \det(A^{-1}A) = \det I_n = 1$$

ou seja,

$$\det A^{-1}. \det A = 1.$$

Mas se A é invertível, pelo Teorema 4.15, $\det A \neq 0$. Logo,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$\square$

Observação Não se pense que se A e B são matrizes de ordem n então,

$$\det(A+B) = \det A + \det B.$$

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então,

$$\det(A+B) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

e

$$\det A + \det B = -2 + 0 = -2.$$

Portanto, neste caso temos que $\det(A+B) = 0 \neq -2 = \det A + \det B$.

Mas não se pense, por outro lado, que temos sempre

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B.$$

Pode acontecer, em certas ocasiões, que sendo C e D matrizes de ordem n,

$$\det(C+D) = \det C + \det D.$$

Por exemplo, se

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então,

$$\det(C+D) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

e

$$\det C + \det D = -1 + 1 = 0.$$

Portanto, neste caso temos que $\det(C+D) = 0 = \det C + \det D$.

4.9 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Seja A uma matriz de ordem n, $n \geq 2$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\det(I_n + A) = 1 + \det(A)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\det(A^4) = (\det(A))^4$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\det(3A) = 3\det(A)$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se $\det(A) = 0$, então o sistema não homogéneo $AX = B$ é possível e indeterminado.

2. Sejam A e B matrizes de ordem n. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se A, B são invertíveis, então AB é invertível.

   $\boxed{\text{B}}$ Se $AB = I_n$, então $A = B^{-1} = I_n$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se $A = B^{-1} = I_n$, então $AB = I_n$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se AB é invertível, então A, B são invertíveis.

3. Sejam A, B matrizes de ordem n. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se A é invertível e $\det(ABA) = 0$, então $\det(B) = 0$.

   $\boxed{\text{B}}$ Se A é invertível e $A^{-1} = A$, então $|A| = \pm 1$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se a forma de escada reduzida de A tem uma linha nula, então $|A| = 0$.

   $\boxed{\text{D}}$ Não existe A tal que $|AA^T| = 1$.

4. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ A regra de Cramer não pode ser usada para resolver qualquer sistema com 2 equações e 3 incógnitas.

   $\boxed{\text{B}}$ A regra de Cramer pode ser usada para resolver qualquer sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas.

   $\boxed{\text{C}}$ Se a regra de Cramer poder ser usada para resolver um sistema, então o sistema não pode ter 2 equações e 3 incógnitas.

   $\boxed{\text{D}}$ Se a regra de Cramer poder ser usada para resolver um sistema, então o sistema tem número de equações igual ao número de incógnitas.

4.10 Interpretação Geométrica de Determinantes 2×2

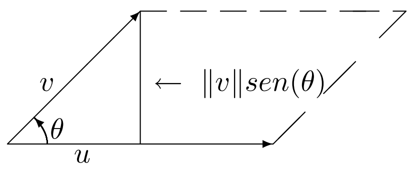
Nesta secção veremos a que corresponde, numa visão geométrica, o determinante de uma matriz de ordem 2. O produto interno encontra-se no apêndice: "Produto Interno".

Proposição 4.26 *Se A é uma matriz de ordem 2, então $|\det A|$ é a área do paralelogramo determinado pelos 2 vectores de $\mathbb{R}^2$ que representam as matrizes colunas de A.*

Demonstração Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então os vectores, de $\mathbb{R}^2$ que correspondem às colunas de A, serão

$$u = (a_{11}, a_{21}) \qquad \text{e} \qquad v = (a_{12}, a_{22}).$$

Vamos supor que os vectores não são múltiplos um do outro. Pois caso sejam múltiplos um do outro, então a área do paralelogramo é zero e também $\det A = 0$.



Sabemos que a área do paralelogramo é

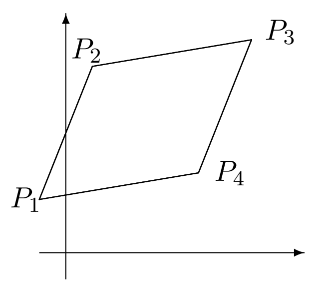
$$\text{área } = \text{base} \times \text{altura} = \|u\| \|v\| sen(\theta)$$

em que θ é o ângulo formado por u e v. Assim,

$$\begin{aligned}
(\text{área})^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 sen^2(\theta) = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - cos^2(\theta)) \\
&= (\|u\|^2 \|v\|^2) - (\|u\|^2 \|v\|^2 cos^2(\theta)) \\
&= \|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2 \\
&= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2 \\
&= a_{11}^2 a_{22}^2 + a_{21}^2 a_{12}^2 - 2(a_{11}a_{12})(a_{21}a_{22}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 \\
&= (\det A)^2.
\end{aligned}$$

Donde, $|\det A|$ =área. $\square$

Exemplo 4.27 *A área do paralelogramo de vértices $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (1, 7)$, $P_3 = (7, 8)$, $P_4 = (5, 3)$.*



Pela figura vemos que $\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 5)$ e $\overrightarrow{P_1P_4} = (6, 1)$ formam dois lados adjacentes do paralelogramo. Assim, pela Proposição anterior,

$$\textit{área} = |\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}| = |2 - 30| = |-28| = 28.$$

Porque a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo, definido pelos 2 vectores, podemos utilizar a Proposição 4.26, para determinar a área de um triângulo.

Exemplo 4.28 *A área do triângulo de vértices* $A = (-5, 4)$, $B = (3, 2)$, $C = (-2, -3)$ *pode ser calculada tendo em conta que* $\overrightarrow{AB} = (8, -2)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (3, -7)$ *formam 2 lados do triângulo. Assim, pelo que mencionámos anteriormente,*

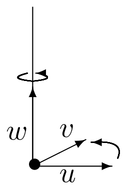
$$\text{área} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-56+6| = 25.$$

4.11 Produto Externo e Produto Misto de Vectores de $\mathbb{R}^3$

Nesta secção iremos abordar o produto externo e o produto misto. O produto interno encontra-se no apêndice: "Produto Interno".

Um problema que surge no estudo de movimentos rotacionais no espaço tridimensional é o de encontrar o eixo de rotação de um objecto que está a girar e identificar se a rotação é horária ou anti-horária, a partir de um ponto específico do eixo de rotação.

Consideremos dois vectores u e v como representado na figura.



Façamos o vector u girar até ser colinear com o vector v. O eixo desta rotação tem de ser perpendicular ao plano definido por u e v, em particular o vector w serve para identificar a orientação do eixo de rotação. Ou seja, o vector que for escolhido para eixo de rotação terá de ser perpendicular a u e a v e conterá a informação sobre o sentido da rotação.

Definição 4.29 *Sejam* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *e* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$. *Designa-se por* **produto externo** (*ou produto vectorial*) *de* u *por* v *e denota-se por* $u \times v$, *o vector de* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Como "mnemónica", expressemos o vector $u \times v$ como combinação linear dos vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Porque

$$
\begin{aligned}
u \times v &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3 \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.30 *Sendo* $u = (1, 0, 2)$, $v = (0, -1, 0)$ *então*

$$
\begin{aligned}
u \times v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} e_3 \\
&= 2e_1 - 0e_2 - e_3 = (2, 0, -1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v \times u &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\
&= -2e_1 + 0e_2 + e_3 = (-2, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Proposição 4.31 *Sejam* u, v, t *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *e* α *um escalar. Entâo:*

1. $u \times v = -(v \times u)$
2. $(u \times v)|u = (u \times v)|v = 0$
3. $\alpha(u \times v) = (\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$
4. $(u + v) \times t = (u \times t) + (v \times t)$
5. $t \times (u + v) = (t \times u) + (t \times v)$

Teorema 4.32 *Sejam* u *e* v *vectores não nulos de* $\mathbb{R}^3$ *e seja* θ *o ângulo formado por* u *e* v.

1. $\|u \times v\| = \|u\|\|v\| sen(\theta)$
2. *a área do paralelogramo de lados adjacentes* u *e* v *é*

$$\|u \times v\|.$$

Demonstração

1. Como $0 \leq \theta \leq \pi$ vem que $sen(\theta) = \sqrt{1 - cos^2(\theta)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u\|\|v\|sen(\theta) &= \|u\|\|v\|\sqrt{1-cos^2(\theta)} = \|u\|\|v\|\sqrt{1-\frac{(u|v)^2}{\|u\|^2\|v\|^2}} \\ &= \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2-(u|v)^2} \\ &= \sqrt{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)} \\ &= \sqrt{(u_2v_3-v_2u_3)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2} \\ &= \|u \times v\|. \end{aligned}$$

2. A área do paralelogramo de lados adjacentes u e v é

$$\text{área} = base \times altura = \|u\|\|v\|sen(\theta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{como já vimos}}}{=} \|u \times v\|.$$

□

Exemplo 4.33 *A área do triângulo de* $\mathbb{R}^3$ *de vértices* $P_1 = (2,2,0)$, $P_2 = (-1,0,2)$, $P_3 = (0,4,3)$ *é metade da área do paralelogramo de lados adjacentes* $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,-2,2)$ *e* $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,3)$.

Como

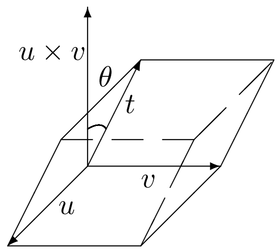
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10e_1 + 5e_2 - 10e_3 = (-10,5,-10)$$

vem que a área do triângulo é

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \frac{1}{2}\sqrt{100+25+100} = \frac{15}{2}.$$

Dados 3 vectores u, v, t de $\mathbb{R}^3$, que têm o mesmo ponto inicial, eles definem um paralelepípedo cujo volume é dado pelo produto da área da sua base (paralelogramo definido por u e v) pela sua altura h. Já vimos que $\|u \times v\|$ nos dá a área da base (Teorema 4.32) e que $u \times v$ é perpendicular a u e a v (Proposição 4.31). Sendo θ o ângulo formado pelos vectores $u \times v$ e t, a altura do paralelepípedo é

$$h = \|t\||cos(\theta)|.$$



Assim, o volume do paralelepípedo é

$$\|u \times v\| \|t\| |cos(\theta)| = |\|u \times v\| \|t\| cos(\theta)| = |(u \times v)|t|.$$

Definição 4.34 *Dados* 3 *vectores* u, v, t *de* $\mathbb{R}^3$, *chamamos* **produto misto** *dos vectores* u, v *e* t *ao número real*

$$(u \times v)|t.$$

Como "mnemónica", se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $t = (t_1, t_2, t_3)$ então

$$\begin{aligned}
(u \times v)|t &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) |(t_1, t_2, t_3) \\
&= t_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - t_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + t_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemplo 4.35 *Determine* k *por forma a que o paralelepípedo de lados* $u = (2, k, 2)$, $v = (0, 4, -2)$, $t = (5, -4, 0)$ *tenha volume igual a* 4.

Porque o volume é

$$\begin{aligned}
|(u \times v)|t| &= | \begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 2 & k & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} | \\
&= | - 10k - 40 - 16| = | - 10k - 56| = 4,
\end{aligned}$$

então,

$$-(-10k - 56) = 4 \qquad ou \qquad (-10k - 56) = 4.$$

Donde,

$$k = -5.2 \qquad ou \qquad k = -6.$$

4.12 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se u, v, w são vectores de $\mathbb{R}^3$, então $u|(v \times w) = -w|(v \times u)$.

   $\boxed{\text{B}}$ Se u, v são vectores de $\mathbb{R}^3$, então $u \times v = (-v) \times u$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se u, v, w são vectores de $\mathbb{R}^3$, então $u|(v \times w) = (u \times v)|w$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se u, v são vectores de $\mathbb{R}^3$, então $u \times v = -v \times (-u)$.

2. Considere o sistema de equações lineares na sua forma matricial $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $|A| = -10$ logo o sistema é de Cramer.

   $\boxed{\text{B}}$ O volume do paralepípedo definido por $u = (0, 1, -1)$, $v = (2, 3, 1)$ e $t = (-1, 2, 1)$ é 10.

   $\boxed{\text{C}}$ A área do triângulo de lados adjacentes $u = (0, 1, -1)$, e $t = (-1, 2, 1)$ é $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

   $\boxed{\text{D}}$ O sistema é possível e determinado sendo $y = \frac{1}{2}$.

3. Seja $\mathcal{A}$ a área do paralelogramo definido pelos vectores $u = (1, a)$ e $v = (1, b)$, com $b \neq 0$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se $a = -b$ então $\mathcal{A} \neq 0$

   $\boxed{\text{B}}$ Se $a = b$ então $\mathcal{A} = 0$

   $\boxed{\text{C}}$ Se $a = 2b$ então $\mathcal{A} \neq 0$

   $\boxed{\text{D}}$ Se $ab \neq 0$ então $\mathcal{A} \neq 0$

4.13 Exercícios

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

   a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 3 & a-1 \end{bmatrix}$$

   Para que valores de a temos $\det(A) = 0$.

3. Usando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   a) através da segunda linha de A.
   b) através da primeira coluna de A.
   c) através da terceira linha de A.

4. Determine, sem fazer contas:

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

   b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

   c) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 12 & 6 & 7 \\ 12 & -2 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

   d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

   e) $\begin{vmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix}$

5. Calcule o determinante das seguintes matrizes, usando transformações elementares:

   a) $\begin{bmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ temos

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\begin{vmatrix} b+c & a+c & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. Encontre os valores de k para os quais as seguintes matrizes são invertíveis:

   a) $\begin{bmatrix} k-3 & -2 \\ -2 & k-2 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ k & 3 & 2 \end{bmatrix}$

9. Para cada uma das seguintes matrizes, calcule a matriz adjunta e a sua inversa:

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. Seja A uma matriz de ordem n. Prove que:

    (a) A é invertível se, e só se, $adj(A)$ é invertível.

    (b) $|adj(A)| = |A|^{n-1}$.

    (c) Se a matriz tem ordem 2, então $|adj(A)| = |A|$.

11. Seja A e B matrizes de ordem n, invertíveis. Mostre que

$$adj(AB) = adj(B)adj(A).$$

12. Se possível, resolva os seguintes sistemas, usando a Regra de Cramer.

    a) $\begin{cases} 7x-3y=3 \\ 3x+y=5 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-y-z=-1 \\ y+z=0 \end{cases}$

13. Encontre o valor de x sem resolver para as outras incógnitas:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=4 \\ x-2y-z=2 \\ 3x+y+z=6 \end{cases}$$

14. Sabendo que A é uma matriz 4×4 tal que $\det(A) = -6$, calcule:

    a) $\det(-A)$.

    b) $\det(3A)$.

    c) $\det(A^T)$.

    d) $\det(A^{-1})$.

15. Calcule a área do paralelogramo determinado pelas colunas de A.

    a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

    b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

16. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelas colunas de A.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. Calcule a área do paralelogramo cujos vértices são $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (4,4)$, $P_3 = (7,5)$ e $P_4 = (4,3)$.

18. Calcule a área do trângulo cujos vértices são $P_1 = (2,0)$, $P_2 = (3,4)$ e $P_3 = (-1,2)$.

19. Calcule o volume do paralelepípedo de lados $u = (2,-6,2)$, $v = (0,4,-2)$ e $w = (2,2,-4)$.

20. Considere os pontos $A = (0,1,1)$, $B = (2,-1,0)$ e $C = (-1,0,1)$.

    (a) Justifique que os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

    (b) Determine a área do triângulo de vértices A, B e C.

    (c) Calcule o volume do paralepípedo definido por $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

21. Sejam $u = (2,3,5)$, $v = (0,4,1)$ e $w = (2,5,9)$. Calcule:

    a) $(u \times v) \times (v \times w)$.

    b) $(u \times v) - 4w$.

    c) $u \times (v \times w)$.

    d) $(u \times v) \times w$.

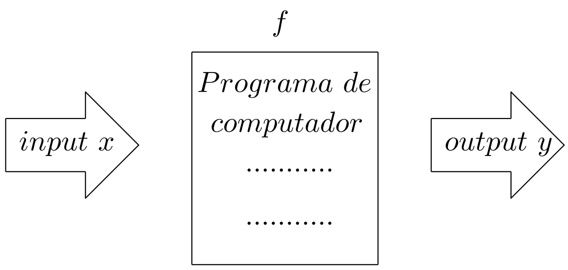
Capítulo 5

APLICAÇÕES LINEARES

Dada uma variável y que depende de uma variável x de tal modo que, para cada valor de x temos um **único** valor de y, dizemos que y é uma função ou **aplicação** de x.

As aplicações serão denotadas pelas letras $f,\ g,\ h, \ldots$, com ou sem índices.

Assim, supondo que uma aplicação f é um programa de computador que para cada entrada (input) x, produz uma única saída (output) y, temos o esquema



Dependendo da aplicação, as entradas e/ou saídas podem ser números, vectores, matrizes,...

5.1 Definições e Notações

O conjunto das entradas de uma aplicação f chama-se **domínio** de f.

Dado um elemento do domínio de f, denotamos por $f(x)$ a saída correspondente, e chamamos **imagem de** x **por** f.

O conjunto de todas as saídas dos elementos do domínio de f chama-se **imagem de** f ou contradomínio de f e denota-se por $Im\ f$.

Iremos estudar aplicações f cujo domínio é $\mathbb{R}^n$ e cuja imagem é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

Neste caso escreveremos

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ X &\mapsto Y \end{aligned}$$

para dizer que, a cada elemento X de $\mathbb{R}^n$, pela aplicação f, corresponde a imagem Y de $\mathbb{R}^m$.

O conjunto $\mathbb{R}^m$ é designado por **conjunto de chegada** de f.

Exemplo 5.1 1. *Seja*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\mapsto (x+y, x^2, y^2) \end{aligned}$$

Como, para cada elemento (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$*, existe um único elemento de* $\mathbb{R}^3$*, que é* $(x+y, x^2, y^2)$*, tal que*

$$f(x,y) = (x+y, x^2, y^2),$$

então f *é uma aplicação.*

O elemento $(1,0,0)$ *pertence a* $\mathbb{R}^3$ *(conjunto de chegada de* f*) mas não pertence ao contradomínio de* f *pois não existe nenhum* (x,y) *em* $\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$(x+y, x^2, y^2) = f(x,y) = (1,0,0)$$

ou seja, tal que

$$x+y=1, \qquad x^2=0, \qquad y^3=0.$$

2. *Seja*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto z \end{aligned}$$

tal que $z^2 = x$.

Porque $f(1,0) = \pm 1$*, então não existe um* **único** *elemento de* $\mathbb{R}$ *que é imagem de* $(1,0)$ *por* f*, portanto,* f *não é aplicação.*

5.2 Definição de Aplicação Linear

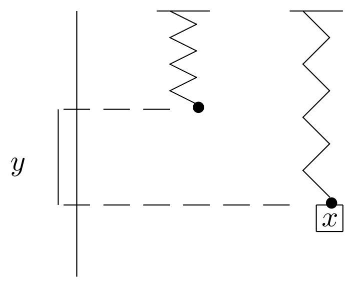
Dizemos que uma variável y é directaments proporcional a uma variável x, se existe uma constante k tal que

$$y = kx.$$

Um exemplo deste conceito é a **Lei de Hooke** que diz:

"Um peso de x unidades suspenso de uma mola, com rigidez k, alonga a mola, a partir do seu comprimento natural, por uma quantidade y que é directamente proporcional a x, isto é, $y = kx$."

Esquematicamente,



Escrevendo $f(x) = kx$, reparamos que esta equação verifica 2 propriedades:

1. Se colocarmos um peso múltiplo de x, αx, suspenso da mola com a rigidez k, então o alongamento da mola será α vezes o alongamento que sofreu a mola com o peso x, isto é,
$$f(\alpha x) = k(\alpha x) = \alpha(kx) = \alpha f(x).$$

2. Se colocarmos dois pesos x_1 e x_2 suspensos da mola, o alongamento que provocam na mola é a soma dos alongamentos que provoca cada peso, isto é,
$$f(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f(x_1) + f(x_2).$$

Este exemplo leva-nos à definição seguinte:

Definição 5.2 *Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Dizemos que f é* **aplicação linear** *se*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha x) = \alpha f(x),$

2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$

Observação As duas propriedades anteriores podem escrever-se numa única propriedade
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Exemplo 5.3 1. *Sendo*
$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, x^2, y^2) \end{aligned}$$
a aplicação do Exemplo 5.1, 1.*, temos*
$$f(3(1, 0)) = f(3, 0) = (3, 9, 0)$$
e
$$3f(1, 0) = 3(1, 1, 0) = (3, 3, 0).$$

Portanto, $f(3(1,0)) \neq 3f(1,0)$. *Logo não se verifica a propriedade* 1. *da* Definição 5.2, *ou seja,*

$$f(\alpha(x,y)) \neq \alpha f(x,y)$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e portanto,* f *não é aplicação linear.*

2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y,x) \end{aligned}$$

é aplicação linear porque

i) $\forall (x,y)\mathbb{R}^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y, \alpha x) = \alpha(y,x) = \alpha f(x,y).$$

ii) $\forall (x,y),(z,w)\mathbb{R}^2$,

$$f((x,y)+(z,w)) = f(x+z, y+w) = (y+w, x+z) = (y,x)+(w,z) = f(x,y)+f(z,w).$$

Ou seja, verificam-se as propriedades 1. *e* 2. *da* Definição 5.2.

Esta aplicação é conhecida por **reflexão** *através da recta* $y = x$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Teorema 5.4 *Se* $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é uma aplicação linear, então*

1. $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.
2. $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Observação Repare-se que em 1. do Teorema 5.4, $0_{\mathbb{R}^n}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^n$ e $0_{\mathbb{R}^m}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração

1. Atendendo a que

$$0.f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

a que

$$f(0.0_{\mathbb{R}^n}) = f(0_{\mathbb{R}^n})$$

e a que f é aplicação linear, temos

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = f(0.0_{\mathbb{R}^n}) = 0f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

2. Porque
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x - x = 0_{\mathbb{R}^n},$$
de 1. e da linearidade de f, temos
$$0_{\mathbb{R}^m} = f(0_{\mathbb{R}^n}) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x).$$
Então, $f(-x) = -f(x)$. □

Observação Muitas vezes teremos de considerar aplicações nas quais o domínio D é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, em vez de todo o $\mathbb{R}^n$. Exactamente, como na definição de linearidade que demos, dizemos que uma aplicação $f:\ D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é linear se satisfaz as propriedades 1. e 2.. O Teorema anterior também é válido para estas aplicações lineares.

5.3 Matriz Canónica de uma Aplicação Linear

Sejam $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$,..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$.

Sabemos que cada vector de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pode escrever-se como combinação linear dos vectores $e_1, e_2, \dots, e_n$ da seguinta forma,
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n.$$
Atendendo à linearidade de f,
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \dots + x_nf(e_n), \qquad (*)$$
ou seja, a imagem de qualquer vector de $\mathbb{R}^n$, por f, pode escrever-se como combinação linear dos vectores $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.

Definição 5.5 *Sejam $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Chamamos* **matriz canónica** *de f, e denotamo-la por M_f, a matriz cujas colunas são os vectores $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.*

Exemplo 5.6 1. *Considerando a reflexão através da recta $y = x$ de $\mathbb{R}^2$* (Exemplo 5.3, 2.*,*
$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$
porque
$$f(e_1) = f(1, 0) = (0, 1),$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (1,0),$$

então a matriz canónica de f é

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) \end{array}$$

2. *Seja*

$$f: \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \ \mapsto \ (x+y, -z, x+z)$$

uma aplicação linear. Então,

$$f(1,0,0) = (1,0,1),$$

$$f(0,1,0) = (1,0,0),$$

$$f(0,0,1) = (0,-1,1),$$

pelo que a matriz canónica de f é

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array}$$

Como já o dissemos (Capítulo 2), os vectores de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$ podem ser representados por matrizes colunas ($n \times 1$, no primeiro caso e $m \times 1$ no segundo caso). Visto assim, $(*)$ será

$$x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n) = M_f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Se X representar a matriz coluna $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, então a matriz coluna Y, cujo vector coluna é $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é

$$Y = M_f X \qquad\qquad (**)$$

Isto significa que se nos derem a matriz canónica, M_f, de uma aplicação linear, $f: \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, através da igualdade $(**)$ podemos obter:

1. *a imagem de um vector de* $\mathbb{R}^n$ *por* f

   Basta construir a matriz coluna X desse vector e através do produto

   $$M_f X = Y$$

   obtemos a matriz coluna Y, cujo vector de $\mathbb{R}^m$ corresponde à imagem do vector inicial por f.

2. *a expressão da aplicação* f

   Usamos o processo descrito em 1., sendo a matriz coluna X, uma matriz de variáveis.

3. *informação sobre se um dado vector de* $\mathbb{R}^m$ *pertence à* $Im\ f$

   Basta construir a matriz coluna Y desse vector e discutir e/ou resolver o sistema $M_f X = Y$.

Exemplo 5.7 *Seja* $f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *a aplicação linear tal que*

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A imagem do vector $(1,1,0)$ *por* f *é,*

$$M_f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o vector $f(1,1,0) = (2,0)$.

A expressão da aplicação f *é,*

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+z \\ -x+y+z \end{bmatrix},$$

dada por

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (2y+z, -x+y+z). \end{aligned}$$

O vector $(1,1) \in Im\ f$ *porque o sistema*

$$M_f X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

é tal que $r(A) = 2 = r([A|B]) < 3 =$ *número de incógnitas. Portanto, o sistema é possível e indeterminado. Uma solução do sistema é,*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \to -l_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{l_2 \to \frac{1}{2}l_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{l_1 \to (l_1+l_2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = 0$, $y = 0$, $z = 1$. *Ou seja, o vector* $(0,0,1)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *é tal que* $f(0,0,1) = (1,1)$.

Observação É fácil mostrar que se $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação tal que $f(x_1,\ldots,x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, com $(x_1,\ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ (ou seja, $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ é uma equação linear homogénea), então f é uma aplicação linear.

Por outro lado se $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear cuja matriz canónica é $M_f = [a_{ij}]$, então, $f(x_1,\ldots,x_n)$, com $(x_1,\ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, é a matriz coluna

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = M_f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Daqui vem (igualdade de matrizes) que

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{array},$$

e com $y_1 = \ldots = y_m = 0$, vem que cada

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,\ i = 1,\ldots,m$$

é uma equação linear homogénea.

Portanto, uma aplicação

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1,\ldots,x_n) &\mapsto f(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_m) \end{aligned}$$

é linear se, e só se, cada $y_i = 0$ é uma equação linear homogénea, com $i = 1,\ldots,m$.

Exemplo 5.8 1. *A aplicação*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) &\mapsto (x_1x_2, x_2, 0) \end{aligned}$$

não é aplicação linear, porque sendo

$$(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2) = (x_1x_2, x_2, 0),$$

então $y_1 = x_1x_2$ *e* $x_1x_2 = 0$ *não é uma equação linear.*

2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2, x_3) \end{aligned}$$

é aplicação linear, porque se

$$(y_1, y_2) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3),$$

então $y_1 = x_1 + x_2$ *e* $y_2 = x_3$ *em que as equações*

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad e \qquad x_3 = 0$$

são equações lineares homogéneas.

3. *A aplicação*

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (x_1 + x_2, x_3 - 1, x_1) \end{aligned}$$

não é aplicação linear, porque sendo

$$(y_1, y_2, y_3) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3 - 1, x_1),$$

então $y_2 = x_3 - 1$ *e a equação*

$$x_3 - 1 = 0$$

não é uma equação linear homogénea.

Proposição 5.9 *Seja* A *uma matriz de tipo* $m \times n$. *Então, existe uma, e uma só, aplicação linear* $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *cuja matriz canónica,* M_f, *é* A.

Demonstração Seja $A = [a_{ij}]$. Então, se $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Porque o produto de duas matrizes dá uma única matriz, podemos falar na aplicação

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

em que $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n,\ i = 1, \ldots, m$.

Pela observação anterior, porque $y_i = 0$ cada $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$ é uma equação linear homogénea, $i = 1, \ldots, m$, então f é aplicação linear. Por construção, $M_f = A$.

Suponhamos que existem duas aplicações lineares

$$f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad \text{e} \qquad g:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tais que $M_f = A$ e $M_g = A$. Assim sendo, se $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = M_f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = M_g \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [g(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Donde, $f = g$ e a aplicação linear é única. □

5.4 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere as aplicações
   $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_1(x, y, z) = (x + y, z)$
   $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_2(x, y, z) = (x - y^2, z)$
   $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_3(x, y, z) = (x - 2y, z)$
   $f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_4(x, y, z) = (x + 2, z)$
   para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$.
   Quais destas aplicações são aplicações lineares e quais é que não o são?

   A f_1, f_2 e f_3 são aplicações lineares e f_4 não é aplicação linear.

   B f_1, f_2 são aplicações lineares e f_3, f_4 não são aplicações lineares.

   C f_1, f_3 são aplicações lineares e f_2, f_4 não são aplicações lineares.

   D f_1, f_2, f_3 e f_4 são aplicações lineares.

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e sejam x, y dois vectores de $\mathbb{R}^n$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $f(x - y) = f(x) - f(y)$.

   B $f(x^2) = f(x)^2$:

   C $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

   D $f(3x + 5y - x) = 2f(x) + 5f(y)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

   $$f(x, y, z) = (x + y, y - z).$$

   A matriz canónica de f é:

   A $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Então, $f(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, é igual a:

   A $(x + 2y, -y)$.

   B (x, y).

   C $(x, 2x - y)$.

   D $(3x, -y)$.

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $M_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Então, $f(2, 2)$ é igual a:

   A $(1, 0)$.

   B $(6, 2)$.

   C $(2, 2)$.

   D $(1, -1)$.

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $(1, 0) \in Im\ f$.

   B $f(0, 1, 1) = (1, 1)$.

   C $f(-1, 1, 1) = (0, 0)$.

   D $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$.

5.5 Núcleo e Imagem de uma Aplicação Linear

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Já vimos que $Im\ f$ é o conjunto das imagens, por f, dos elementos de $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$Im\ f = \{f(x_1, \ldots, x_n) : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

No caso de S ser um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, define-se

$$f(S) = \{f(x_1, \ldots, x_n) : \ (x_1, \ldots, x_n) \in S\}.$$

Usando esta última definição,

$$f(\mathbb{R}^n) = Im\ f.$$

Assim, se

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t(v_1, v_2, \ldots, v_n),$$

em que $t \in \mathbb{R}$ e $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ é um elemento não nulo de $\mathbb{R}^n$, designar uma recta de $\mathbb{R}^n$, a sua imagem por f é o conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^m$ que verificam

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(t(v_1, v_2, \ldots, v_n)) = tf(v_1, v_2, \ldots, v_n), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, a imagem por f de uma recta de $\mathbb{R}^n$ é

- o vector nulo de $\mathbb{R}^m$, se $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0_{\mathbb{R}^m}$.
- uma recta de $\mathbb{R}^m$, se $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0_{\mathbb{R}^m}$.

Temos pois que distinguir estas duas situações.

Definição 5.10 *Seja $f : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.*

Chama-se **núcleo** *de f e denota-se por $Nuc\ f$ ou $Ker\ f$, o conjunto dos elementos de $\mathbb{R}^n$ que têm por imagem, através de f, o vector nulo de $\mathbb{R}^m$, isto é*

$$Nuc\ f = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ f(x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Observação Sendo $f : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, repare-se que os conjuntos

$$Nuc\ f = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ f(x_1, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$$

e

$$Im\ f = \{f(x_1, \ldots, x_n) : \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

podem ser distintos.

Se $n \neq m$, enquanto que $Im\ f$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, $Nuc\ f$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Mesmo no caso em que $f : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear, $Nuc\ f$ e $Im\ f$ podem ser distintos pois o $Nuc\ f$ é constituido pelos elementos de $\mathbb{R}^n$ que são transformados por f no zero, enquanto que $Im\ f$ é constituido pelas imagens dos elementos de $\mathbb{R}^n$ por f.

Exemplo 5.11 *Consideremos a aplicação*

$$f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \ \mapsto \ (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2)$$

Atendendo à aplicação, facilmente se demonstra que f é aplicação linear. Por definição,

$$Nuc\ f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ f(x_1, x_2) = (0, 0)\}.$$

Porque $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2)$, de $f(x_1, x_2) = (0, 0)$ resulta o sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $x_1 - x_2 = 0$, pelo que

$$\begin{aligned} Nuc\ f &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 - x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 = x_2\} \\ &= \{(x_1, x_1) :\ x_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, 1) :\ x_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1, 1) > . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Im\ f &= \{f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2) :\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, -2x_1) + (-x_2, 2x_2) :\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1, -2) + x_2(-1, 2) :\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1, -2), (-1, 2) > . \end{aligned}$$

Observação Se $f :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear e se M_f é a matriz canónica de f, então o núcleo de f é o conjunto solução do sistema homogéneo

$$M_f X = 0.$$

Usando esta Observação e a Proposição 3.7, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.12 *Seja $f :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então o núcleo de f é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.*

Vejamos um outro subespaço.

Proposição 5.13 *Sejam $f :\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e S um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $f(S)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.*

Demonstração Por definição,

$$f(S) = \{f(u) :\ u \in S\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

e porque

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

então $f(S)$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^m$.

Sejam r e v dois vectores de $f(S)$. Então, existem u e s em S tais que

$$r = f(u) \qquad \text{e} \qquad v = f(s).$$

Assim,

$$r + s = f(u) + f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearidade de } f}}{=} f(u+v).$$

Como S é subespaço de $\mathbb{R}^n$, $u + s$ pertence a S. Isto implica que $r + v$ seja um elemento de $f(S)$.

Seja k um escalar. Então,

$$kr = kf(u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearidade de } f}}{=} f(ku).$$

Como S é subespaço de $\mathbb{R}^n$, ku pertence a S e consequentemente kr é um elemento de $f(S)$. Portanto, $f(S)$ é subespaço de $\mathbb{R}^m$. $\square$

Desta Proposição resulta o seguinte resultado.

Proposição 5.14 *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, então $Im\ f = f(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.*

Recorde-se que se A e B são conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ é uma aplicação, dizemos que

- f é **injectiva** se

  $$\forall x, x' \in A,\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

  ou seja, f é injectiva se elementos diferentes de A têm imagens diferentes.

- f é **sobrejectiva** se

  $$\forall y \in B,\ \exists x \in A,\ f(x) = y$$

  isto é, f é sobrejectiva se qualquer elemento de B é imagem, por f, de algum elemento de A.

- f é **bijectiva** se f é injectiva e sobrejectiva, isto é,

  $$\forall y \in B,\ \exists^1 x \in A : \ f(x) = y.$$

Vejamos uma outra caracterização de injectividade quando f é uma aplicação linear.

Proposição 5.15 *Seja $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então*

$$f \text{ é injectiva se, e só se, } Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Demonstração Suponhamos que f é injectiva e seja $u \in Nuc\ f$. Então,

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^m} = f(0_{\mathbb{R}^n}).$$

Como f é injectiva, $u = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donde,

$$Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Reciprocamente, suponhamos que $Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e vejamos que f é injectiva. Se x e $x' \in \mathbb{R}^n$ forem tais que

$$f(x) = f(x') \qquad \text{então} \qquad f(x) - f(x') = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Mas f é aplicação linear, pelo que

$$f(x - x') = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Mas isto significa que $x - x' \in Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ou seja, $x - x' = 0_{\mathbb{R}^n}$ e consequentemente, $x = x'$. □

Observação Sendo $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e M_f a matriz canónica de f, então,

- f é injectiva se, e só se, $Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ (Proposição 5.15) se, e só se, o sistema homogéneo $M_f X = 0$ é possível e determinado (só tem a solução nula).
- f é sobrejectiva se, e só se, o sistema $M_f X = B$ é possível, qualquer que seja a matriz coluna B cujo vector está em $\mathbb{R}^m$.

Observação Se $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear e M_f é a matriz canónica de f (matriz $m \times n$) , então,

- Se $n > m$, o sistema homogéneo $M_f X = 0$ tem mais incógnitas (o número de colunas de M_f é n) do que equações (o número de linhas de M_f é m). Assim,

  $$r(M_f) \leq m < n$$

  e o sistema é possível e indeterminado. Logo, f não é injectiva.
- Se $m > n$, então a matriz em forma de escada reduzida obtida de M_f terá, pelo menos, uma linha nula. Sendo A a matriz em forma de escada reduzida obtida de M_f, então existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que

  $$E_1 \ldots E_k M_f = A.$$

Como as matrizes elementares são invertíveis,

$$M_f = E_k^{-1} \dots E_1^{-1} A.$$

Se B for a matriz coluna $m \times 1$, com todas as entradas iguais a zero à excepção da entrada $(m, 1)$ que será igual a 1, então o sistema $AX = B$ é impossível (recorde-se que a m-ésima linha de A é nula). Mas isto implica que o sistema

$$M_f X = (E_k^{-1} \dots E_1^{-1}) AX = (E_k^{-1} \dots E_1^{-1}) B$$

seja impossível. Logo, f não é sobrejectiva.

- Se f é injectiva e sobrejectiva, então $n = m$. Como f é injectiva, o sistema $M_f X = 0$ é possível, pelo que $r(M_f) = n$ e M_f é invertível.

- Se $n = m$ e M_f é invertível, então o sistema $M_f X = B$ é possível e determinado (solução $X = M_f^{-1} B$), qualquer que seja a matriz coluna B cujo vector está em $\mathbb{R}^m$. Então f é injectiva e sobrejectiva.

Proposição 5.16 *Seja* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação linear. Então*

f é injectiva se, e só se, f é sobrejectiva.

Demonstração Suponhamos que f é injectiva e seja M_f a sua matriz canónica. Pela observação, o sistema $M_f X = 0$ é possível e determinado. Isto implica que $r(M_f) = n$, donde M_f é invertível. Assim, o sistema $M_f X = B$ é possível e determinado (solução $X = M_f^{-1} B$), qualquer que seja a matriz coluna B. Donde, f é sobrejectiva.

Reciprocamente, se f é sobrejectiva, o sistema $M_f X = B$ é possível, qualquer que seja a matriz coluna B de tipo $m \times 1$. Se $r(M_f) < n$, então a matriz em forma de escada reduzida obtida de M_f teria, pelo menos, uma linha nula. Fazendo um raciocínio análogo ao feito na observação anterior (caso $m > n$), concluíriamos que existiria uma matriz coluna B' tal que $M_f X = B'$ era um sistema impossível. Como isto não acontece, $r(M_f) = n$ e M_f é invertível. Portanto, o sistema $M_f X = 0$ é possível e determinado e f é injectiva. $\square$

Exemplo 5.17 *A aplicação linear*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, z, 0)$$

tem matriz canónica

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$r(M_f) = 2$, então M_f não é invertível. Pela observação, f não é injectiva ou f não é sobrejectiva. Pela Proposição 5.16*, f não é injectiva nem é sobrejectiva.*

Proposição 5.18 *Seja* $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação linear. Então,*

1. *Se* $W =< v_1, \dots, v_k >$ *é subespaço de* $\mathbb{R}^n$*, então*

$$f(W) =< f(v_1), \dots, f(v_k) > .$$

2. *Se* f *é injectiva e* S *é um conjunto de vectores linearmente independentes, de* $\mathbb{R}^n$*, então,* $f(S)$ *é um conjunto de vectores linearmente independentes de* $\mathbb{R}^m$*.*

Demonstração

1. Pela Proposição 5.13, $f(W)$ é subespaço de $\mathbb{R}^m$. Porque $v_1, \dots, v_k \in W$, então $f(v_1), \dots, f(v_k) \in f(W)$ e

$$< f(v_1), \dots, f(v_k) > \subseteq f(W).$$

Seja $z \in f(W)$. Então, existe $u \in W$ tal que $f(u) = z$. Sendo

$$u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, então

$$z = f(u) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearidade de } f}}{=} \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_k f(v_k).$$

Ou seja, $z \in< f(v_1), \dots, f(v_k) >$ e

$$f(W) =< f(v_1), \dots, f(v_k) > .$$

2. Suponhamos que $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ é lineramente independente.

Então, $f(S) = \{f(v_1), \dots, f(v_r)\}$. Se

$$\alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_r f(v_r) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

então, por linearidade,

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

ou seja,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r \in Nuc\ f.$$

Porque f é injectiva, $Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Mas S é linearmente independente, então

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_r = 0$$

e $f(S)$ é linearmente independente. □

5.6 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $Nuc\ f = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}$.

   B $Im\ f = \{f(x) :\ x \in \mathbb{R}^n\}$.

   C Existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}$ e $x \notin Nuc\ f$.

   D Se $y \in Im\ f$, então existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = y$.

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, z, x - y + z)$, para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $Nuc\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x - y, z, x - y + z) = (0, 0, 0)\}$.

   B $Nuc\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y = 0,\ z = 0\}$.

   C $Nuc\ f = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 :\ x = y\}$.

   D $Nuc\ f =< (1, 1, 0), (0, 0, 1) >$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - y, z, x - y + z)$, para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $Im\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x + y\}$.

   B $Im\ f = \{f(x, y, z) :\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

   C $Im\ f = \{(x - y, z, x - y + z) :\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

   D $Im\ f =< (1, 0, 1), (0, 1, -1) >$.

4. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com $n \neq m$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se S é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então $f(S)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

   B Se $y \in Im\ f$, então $y \in \mathbb{R}^m$.

   C Se $x \in Nuc\ f$, então $x \in \mathbb{R}^m$.

   D $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se f é injectiva, então $Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

   B Se f é sobrejectiva, então $Im\ f = \mathbb{R}^m$.

   C Se existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}$ então f não é injectiva.

   D Se existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y \notin Im\ f$, então f não é sobrejectiva.

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injectiva e sejam x, y, z vectores de $\mathbb{R}^n$, linearmente independentes. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $\{f(x), f(y), f(z)\}$ é linearmente independente.

   B f é sobrejectiva.

   C $\{f(x) - f(y), f(y), f(z)\}$ é linearmente independente.

$\boxed{\text{D}}$ $f(< x, y, z >) \neq < f(x), f(y), f(z) >$.

7. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Existem aplicações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ Existem aplicações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{C}}$ Qualquer aplicação linear injectiva de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.

   $\boxed{\text{D}}$ Qualquer aplicação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^5$ é injectiva.

8. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Existem aplicações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.

   $\boxed{\text{B}}$ Existem aplicações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.

   $\boxed{\text{C}}$ Qualquer aplicação linear de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$ transforma $0_{\mathbb{R}^5}$ em $0_{\mathbb{R}^3}$.

   $\boxed{\text{D}}$ Qualquer aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$ transforma $0_{\mathbb{R}^3}$ em $0_{\mathbb{R}^5}$.

5.7 Composição de Aplicações

Se A, B e C forem conjuntos, $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ forem duas aplicações, como o conjunto de chegada de f é igual ao domínio de g, podemos definir a **composição** de g após f, que se designa por $g \circ f$, e é a aplicação

$$\begin{aligned} g \circ f :\ & A \longrightarrow C \\ & x \ \mapsto\ g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Proposição 5.19 *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ forem duas aplicações lineares, então a aplicação $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação linear.*

Demonstração Vejamos que $g \circ f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é linear.

1. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então,

$$g \circ f(\alpha x) = g(f(\alpha x)) \underset{\substack{\uparrow \\ f\ linear}}{=} g(\alpha f(x)) \underset{\substack{\uparrow \\ g\ linear}}{=} \alpha g(f(x)) = \alpha(g \circ f(x)).$$

2. Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, então,

$$g \circ f(x_1 + x_2) = g(f(x_1 + x_2)) \underset{\substack{\uparrow \\ f\ linear}}{=} g(f(x_1) + f(x_2)) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ g\ linear}}{=} g(f(x_1)) + g(f(x_2)) = (g \circ f(x_1)) + (g \circ f(x_2)).$$

Logo, $g \circ f$ é uma aplicação linear. $\square$

Sejam $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ duas aplicações lineares, M_f e M_g as respectivas matrizes canónicas. Podemos definir a aplicação linear

$$g \circ f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Nestas condições, uma pergunta pode ser colocada:

Qual a relação que existe entre as matrizes canónicas $M_{g\circ f}$, M_f e M_g?

Atendendo à definição de composição de aplicações, se e_i for um vector canónico de $\mathbb{R}^n$, então

$$g \circ f(e_i) = g(f(e_i)).$$

Porque o vector $g(f(e_i))$ pode ser escrito na forma matricial por

$$M_g[f(e_i)]$$

onde $[f(e_i)]$ é a matriz coluna $m \times 1$, com as componentes de $f(e_i)$ e o vector $f(e_i)$ pode ser escrito como

$$M_f[e_i]$$

em que $[e_i]$ é a matriz coluna $n \times 1$, com as componentes de e_i, vem que

$$M_g M_f[e_i]$$

é a forma matricial de $g(f(e_i))$. Porque a forma matricial de $g \circ f(e_i)$ é

$$M_{g\circ f}[e_i]$$

e $g \circ f(e_i) = g(f(e_i))$, então,

$$M_{g\circ f}[e_i] = M_g M_f[e_i].$$

Ou seja, a i-ésima coluna da matriz $M_{g\circ f}$ é igual à i-ésima coluna da matriz produto $M_g M_f$, para $i = 1, \ldots, n$. Então,

$$M_{g\circ f} = M_g M_f.$$

Acabámos de demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 5.20 *Sejam $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $g:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ duas aplicações lineares cujas matrizes canónicas são M_f e M_g. Então, a matriz canónica de $g \circ f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ é obtida por*

$$M_{g\circ f} = M_g M_f.$$

Exemplo 5.21 1. *Sejam* $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *e* $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *duas aplicações lineares em que as matrizes canónicas de* f *e* g *são iguais à matriz*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela Proposição 5.20*,*

$$M_{g\circ f} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

2. *Sejam* $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *a aplicação linear tal que* $f(x, y) = (y, -x)$ *com* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *a aplicação linear tal que* $g(x, y) = (-x, y)$ *com* $x, y \in \mathbb{R}$*. As matrizes canónicas de* f *e* g *são respectivamente*

$$M_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela Proposição 5.20*,*

$$M_{g\circ f} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, pela Proposição 5.20*,*

$$M_{f\circ g} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto neste caso, as aplicações $g \circ f$ *e* $f \circ g$ *são distintas.*

5.8 Aplicações Lineares Invertíveis

Vejamos o que acontece às aplicações lineares que são invertíveis.

Definição 5.22 *Sejam* A*,* B *conjuntos e* $f: A \longrightarrow B$ *uma aplicação. Dizemos que* f *é* **invertível** *se existir uma aplicação* $g: B \longrightarrow A$ *tal que*

$$f \circ g = id_B \qquad , \qquad g \circ f = id_A$$

em que

$$\begin{array}{rl} id_B: & B \longrightarrow B \\ & x \mapsto x \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{rl} id_A: & A \longrightarrow A \\ & x \mapsto x \end{array}$$

Observação

1. $f: A \longrightarrow B$ é uma aplicação invertível se, e só se, f é bijectiva.

2. Se f é invertível então a aplicação g tal que $g \circ f = id$, $f \circ g = id$ é única. Esta aplicação chama-se **inversa** de f e denota-se por f^{-1}.

3. Se $f : A \longrightarrow B$ é injectiva, então $f : A \longrightarrow Im\ f$ é bijectiva, pelo que existe $f^{-1} : Im\ f \longrightarrow A$.

Proposição 5.23 *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear injectiva, então*

$$f^{-1} : Im\ f \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma aplicação linear.

Demonstração Atendendo à observação, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow Im\ f$ é uma aplicação linear bijectiva. Então existe a aplicação

$$f^{-1} : Im\ f \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = y \to x$$

Vejamos que f^{-1} é linear.
Sejam y_1, $y_2 \in Im\ f$, então se α_1 e $\alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = f \circ f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

e

$$f(\alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2)) \underset{\underset{f \text{ linear}}{\uparrow}}{=} \alpha_1 (f \circ f^{-1}(y_1)) + \alpha_2 (f \circ f^{-1}(y_2)) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

Consequentemente,

$$f(f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = f(\alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2)).$$

Como f é injectiva,

$$f^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f^{-1}(y_1) + \alpha_2 f^{-1}(y_2),$$

ou seja, f^{-1} é linear. $\square$

Teorema 5.24 *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Se a matriz canónica, M_f, de f é invertível então*

1. *f é invertível.*

2. *a matriz canónica de f^{-1} é $M_{f^{-1}}$, isto é $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$.*

Demonstração

1. Se M_f é invertível então, pela Observação que está a seguir à Proposição 5.15, f é injectiva e sobrejectiva. Então, f é invertível.

2. Porque $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$ e a matriz canónica de $id_{\mathbb{R}^n}$ é I_n, temos que

$$M_f M_{f^{-1}} = M_{f \circ f^{-1}} = I_n.$$

Consequentemente, $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$. $\square$

Exemplo 5.25 *Seja* $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *a aplicação linear tal que* $f(x,y) = (x, x+y)$, *para todo o* $x, y \in \mathbb{R}$. *A matriz canónica de* f *é*

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Porque $\det M_f = 1 \neq 0$, *então* M_f *é invertível. Pelo* Teorema 5.24, f *é invertível e a matriz canónica de* f^{-1} *é*

$$M_f^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é a aplicação linear tal que* $f^{-1}(x,y) = (x, -x+y)$, *para todo o* $x, y \in \mathbb{R}$.

5.9 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $f \circ g$ é aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ $M_{f \circ g} = M_g \circ M_f$.

   $\boxed{\text{C}}$ $g \circ f(0,0) = (0,0)$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se $(x,y,z) \in Nuc\ g$, então $(x,y,z) \in Nuc\ f \circ g$.

2. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ f é invertível.

   $\boxed{\text{B}}$ $M_{f^{-1}} = \frac{1}{2} M_f$.

   $\boxed{\text{C}}$ $f(0,1) = (1,-1)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $f(x,y) = (2x, 0)$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e sejam x, y vectores de $\mathbb{R}^n$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se $\det M_f \neq 0$, então f é invertível.

   $\boxed{\text{B}}$ $f(x) - f(y) = f(x-y)$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se $f(x+y) = 0_{\mathbb{R}^n}$, então $x + y = 0_{\mathbb{R}^n}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

5.10 Exercícios

1. Diga se as seguintes aplicações são lineares. Se não for, explique qual das propriedades falha:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, y)$.

   b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x^2, y)$.

   c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x, x + y + z)$.

   d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (1, 1)$.

   e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + 1, 2x + y - z)$.

   f) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (2x - 4z, y - 5z)$.

2. Determine a matriz canónica da aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x, y, z) = (y - z, 2x, 4y + z, x + y + z).$$

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $f(x, y, z) = (3x - y, y + 4z, 5x, x - 7z, z)$.

   a) Mostre que f é uma aplicação linear.

   b) Calcule $f(-3, 0, 5)$.

   c) Determine a matriz canónica de f.

   d) Calcule $f(-3, 0, 5)$, usando a matriz canónica de f.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(1, 0) = (3, 2, 4)$ e $f(0, 1) = (2, -1, 5)$.

   a) Determine a matriz canónica de f.

   b) Calcule $f(-2, 1)$.

   c) Determine $f(x, y)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule $f(3, 3, 3)$.

   b) Determine $f(x, y, z)$, com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   c) Encontre, se houver, um vector $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

6. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. Determine o núcleo e a imagem de f.

7. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + z, 4y - z, 0)$. Determine o núcleo e a imagem de f.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (2x - y + 3z, x + z, y - z)$. Verifique se $(3, 3, 0)$ pertence à imagem de f.

9. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

10. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

11. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, x + z, y - z, 7z).$$

Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

12. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (y + z, x + z, 4z)$. Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

13. Considere a aplicação linear cuja matriz canónica é

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f(1, 1, 1)$

(b) Prove que $Nucf =< (-1, 1, 2) >$. Será f injectiva?

(c) Verifique se existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (1, -1)$.

(d) Determine $f(x, y, z)$.

14. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - 5y)$ e $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y) = (-4x, -x + 2y)$.

a) Determine as matrizes canónicas de f e de g.

b) Determine as matrizes canónicas de $f \circ g$ e de $g \circ f$, usando a alínea a).

c) Use a alínea b) para determinar $(f \circ g)(x, y)$.

15. Considere as aplicações lineares $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (3x - y + z, x - 5y, z)$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $g(x, y, z) = (x, y - z, x + 2y)$.

a) Determine as matrizes canónicas de f e de g.

b) Determine as matrizes canónicas de $f \circ g$ e de $g \circ f$, usando a alínea a).

c) Use a alínea b) para determinar $(f \circ g)(x, y, z)$.

16. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - 5y, z)$. Verfique se f é injectiva e em caso afirmativo, determine a matriz canónica de f^{-1}.

17. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x - y, -x - y)$. Verfique se f é injectiva e em caso afirmativo, determine a matriz canónica de f^{-1}.

18. Sejam f e g duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $x \in Nuc(g)$ então $x \in Nuc(f \circ g)$.

19. Considere as seguintes aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y + z, 2z, 3z)$$

$$g(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y + z, 2z, 3z^2)$$

$$h(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + 2y + z, 2z, 3z + 5)$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Indique se cada uma das aplicações é linear. Em caso afirmativo, indique:

(a) a matriz canónica da aplicação.

(b) o núcleo da aplicação.

(c) o conjunto imagem da aplicação.

(d) se a aplicação é injectiva.

(e) se a aplicação é sobrejectiva.

(f) se a aplicação é invertível.

20. Considere as seguintes aplicações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (x + y, x + z, 0)$$

$$g(x, y, z) = (y, z, x)$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) M_f e M_g.

(b) M_{fog}.

(c) $(fog)(x, y, z)$.

21. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ aplicação linear definida por

$$f(x, y, z) = (x + y, y - z, z).$$

f é invertível? Em caso afirmativo, determine a matriz canónica da inversa de f.

Capítulo 6

BASES

Dado um subespaço $W =< v_1, \ldots, v_k >$ de $\mathbb{R}^n$, se o conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente, existe, pelo menos, um vector de S que é combinação linear dos outros vectores (Proposição 3.18). Suponhamos, sem perda de generalidade, que v_1 é combinação linear de $v_2, \ldots, v_k$, isto é,

$$v_1 = a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k, \qquad \text{com } a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}.$$

Seja u um vector de W, então

$$u = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_k v_k, \qquad \text{com } b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R}.$$

Mas então,

$$\begin{aligned} u &= b_1(a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k) + b_2 v_2 + \ldots + b_k v_k \\ &= (b_1 a_2 + b_2) v_2 + \ldots + (b_k a_k + b_k) v_k \end{aligned}$$

isto é, $u \in < v_2, \ldots, v_k >$. Portanto,

$$W \subseteq < v_2, \ldots, v_k > .$$

Facilmente se vê que $< v_2, \ldots, v_k > \subseteq W =< v_1, \ldots, v_k >$. Ou seja,

$$W =< v_2, \ldots, v_k > .$$

Portanto, reduzimos o conjunto de geradores de W.

Podemos repetir este processo até termos um conjunto de vectores que gera W e é linearmente independente.

6.1 Definição e Exemplos de Bases

Comecemos pela definição de base.

Definição 6.1 *Um conjunto de vectores de um subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é uma* **base** *de W se verifica as duas condições seguintes:*

1. *É linearmente independente.*

2. *Gera W.*

Exemplo 6.2 1. *Já vimos que $\mathbb{R}^n =< e_1, e_2, \ldots, e_n >$ em que $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ são os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Como o conjunto formado por estes vectores é linearmente independente, então*

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$, chamada **base canónica de** $\mathbb{R}^n$.

Assim, $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, ...

2. *Sendo $W =< (1, 2, 2), (0, 1, 1), (2, 4, 4) >$, porque*

$$(2, 4, 4) = 2(1, 2, 2)$$

então

$$W =< (1, 2, 2), (0, 1, 1) > .$$

Estes dois vectores que geram W são linearmente independentes, pois se

$$\alpha_1(1, 2, 2) + \alpha_2(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

então

$$(\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0).$$

Donde,

$$\alpha_1 = 0 \qquad e \qquad 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Portanto,

$$\alpha_1 = 0 \qquad e \qquad \alpha_2 = 0.$$

Então, o conjunto formado por estes dois vectores é uma base de W.

3. *O conjunto*

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ porque se

$$\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

então

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Donde,

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Portanto,

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 0, \qquad \alpha_3 = 0.$$

Ou seja, o conjunto formado pelos 3 *vectores é linearmente independente.*

Vejamos que também gera $\mathbb{R}^3$*. Seja* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*. Mostremos que existem escalares* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(0, 0, 1) = (x, y, z).$$

Mas isto implica que

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (x, y, z).$$

Donde,

$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = y, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = z.$$

Portanto,

$$\alpha_1 = x, \qquad \alpha_2 = y - x, \qquad \alpha_3 = z - y.$$

Ou seja, qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ *pode escrever-se como combinação linear destes* 3 *vectores. Logo, o conjunto formado pelos* 3 *vectores é uma base de* $\mathbb{R}^3$.

4. *O conjunto*

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$$

não é uma base de $\mathbb{R}^3$ *porque se*

$$\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

então

$$(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0, 0, 0).$$

Donde,

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \qquad e \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Portanto,

$$\alpha_3 = -\alpha_1 \qquad e \qquad \alpha_2 = -\alpha_1.$$

Ou seja, o conjunto formado pelos 3 *vectores é linearmente dependente.*

5. *O conjunto*

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$$

não é uma base de $\mathbb{R}^3$ *porque* $(0, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ *e vejamos que não existem escalares* $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) = (0, 2, 0).$$

Isto implica que

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (0, 2, 0).$$

Donde,

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 2, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Portanto, um sistema impossível. Ou seja, o vector $(0, 2, 0)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *não se escreve como combinação linear destes* 2 *vectores. Logo, o conjunto formado pelos* 2 *vectores não gera* $\mathbb{R}^3$.

Convenção 6.3 *No caso de* $W =< 0_{\mathbb{R}^n} >$, *convenciona-se que a sua base é o conjunto vazio,* $\emptyset$.

6.2 Dimensão de um Subespaço

Uma pergunta pode colocar-se; "Será possível arranjarmos duas bases de um mesmo subespaço vectorial com um número diferente de vectores?" O seguinte teorema responde a esta pergunta.

Teorema 6.4 *Todas as bases de um subespaço de* $\mathbb{R}^n$ *têm o mesmo número de vectores.*

Demonstração Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Se $W =< 0_{\mathbb{R}^n} >= \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ então, por convenção, a única base é o $\emptyset$.

Suponhamos que $W \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ são duas bases de W. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $k > m$.

Como $\mathcal{B}_2$ gera W, cada vector de $\mathcal{B}_1$ escreve-se como combinação linear dos vectores de $\mathcal{B}_2$. Isto é,

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1m}s_m \\ v_2 &= a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2m}s_m \\ &\vdots \\ v_k &= a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \ldots + a_{km}s_m \end{aligned}$$

Se considerarmos o sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

como $m < k$, o sistema é possível e indeterminado (Corolário 1.22), ou seja, existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, não todos nulos, tais que

$$\begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \ldots + c_k a_{k1} = 0 \\ c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \ldots + c_k a_{k2} = 0 \\ \vdots \\ c_1 a_{1m} + c_2 a_{2m} + \ldots + c_k a_{km} = 0. \end{cases}$$

Mas então,

$$\begin{aligned} c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k &= c_1(a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1m}s_m) + \ldots + c_k(a_{k1}s_1 + a_{k2}s_2 + \ldots + a_{km}s_m) \\ &= (c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \ldots + c_k a_{k1})s_1 + \ldots + (c_1 a_{1m} + c_2 a_{2m} + \ldots + c_k a_{km})s_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que significa que os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes. Impossível pois $\mathcal{B}_2$ é uma base de W. Logo, $k \leq m$. Fazendo o mesmo raciocínio mas trocando os papéis de $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ obtemos que $k = m$. $\square$

Definição 6.5 *Se W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, chamamos* **dimensão** *de W e denotamos por*

$$\dim W,$$

ao número de vectores de qualquer sua base.

Exemplo 6.6

1. *Se $W = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ então $\dim W = 0$.*
2. *Uma recta de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem tem dimensão 1.*
3. *Um plano de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem tem dimensão 2.*
4. *$\mathbb{R}^n$ tem dimensão n.*
5. *O subespaço $W =< (1,2,2), (0,1,1), (2,4,4) >$ do* Exemplo 6.2.2*, tem como sua base o conjunto*
$$\{(1,2,2), (0,1,1)\},$$
pelo que
$$\dim W = 2.$$

Teorema 6.7 *Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e S um conjunto gerador de W com k vectores. Então, S é uma base de W.*

Demonstração Se S não fosse uma base de W, então S era linearmente dependente. Então poderiamos retirar pelo menos um vector de S para obtermos uma base de W. Mas isto implicaria que teriamos uma base de W com menos do que k vectores, contrariando o Teorema 6.4. Portanto, S é uma base de W. $\square$

6.3 Alguns Resultados sobre Bases

Nesta secção iremos ver a importância de determinarmos uma base de um subespaço.

Teorema 6.8 *Se $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base do subespaço W de $\mathbb{R}^n$, então qualquer vector u de W escreve-se de forma única como combinação linear dos vectores de S.*

Demonstração como $W =< v_1, \ldots, v_k >$, se $u \in W$, então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k.$$

Suponhamos que u se escreve de outra forma como combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, isto é, que existem escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ tais que

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_k v_k.$$

Então,

$$0 = u - u = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)v_k.$$

Porque S é linearmente independente,

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_k - \beta_k = 0$$

ou seja,

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_k = \beta_k.$$

E a forma de escrever u como combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$ é única. □

Já vimos que se W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e se S é um conjunto de vectores de W que o gera, então conseguimos encontrar uma base de W que é um subconjunto de S. Vejamos agora como construir uma base de W, que contenha um subconjunto de vectores de W linearmente independentes.

Teorema 6.9 *Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k e S um conjunto de vectores linearmente independentes, contido em W. Então, existe uma base de W que contém os vectores de S.*

Demonstração Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ uma base de W. Suponhamos que

$$S = \{v_1, \ldots, v_r\}$$

e que i é o menor índice tal que $v_i \notin \mathcal{B}$.

Como $\mathcal{B}$ é uma base de W, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (que não são todos nulos pois o v_i não é o vector nulo) tais que,

$$v_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k.$$

Se sempre que $\alpha_j \neq 0$, tivessemos $u_j \in S$, então v_i era combinação linear dos vectores de S. Donde, S era linearmente dependente (impossível). Portanto, existe um j tal que $\alpha_j \neq 0$ e $u_j \notin S$.

Suponhamos, sem perda de generalidade que $\alpha_1 \neq 0$ e $u_1 \notin S$.

Vejamos que o conjunto $C = \{v_i, u_2 \ldots, u_k\}$ (substituimos u_1 por v_i) é uma base de W.

Se C fosse linearmente dependente, existiriam escalares, $\beta_1, \ldots, \beta_k$, não são todos nulos, tais que,

$$\beta_1 v_i + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_k u_k = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Mas então,

$$\beta_1(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k) + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_k u_k = 0_{\mathbb{R}^n},$$

ou seja

$$\beta_1 \alpha_1 u_1 + (\beta_1 \alpha_2 + \beta_2) u_2 + \ldots + (\beta_1 \alpha_k + \beta_k) u_k = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Porque $\mathcal{B}$ é uma base de W,

$$\beta_1 \alpha_1 = 0,\ \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 = 0,\ \ldots, \beta_1 \alpha_k + \beta_k = 0.$$

Como $\alpha_1 \neq 0$, então

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \ldots, \beta_k = 0.$$

O que é impossível. Portanto, C é linearmente independente.

Porque $v_i = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k$, então

$$u_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_i - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} u_k.$$

Pelo que, $< u_1, u_2 \ldots, u_k > = < v_i, u_2 \ldots, u_k >$. Ou seja, C é uma base de W.

Repetindo este processo para outro vector, v_l de S que não esteja em C, e substituindo v_l por um vector de C, que não esteja em S, e que na forma de escrever v_l como combinação linear dos vectores de C, esteja associado a um escalar não nulo, obtemos uma base de W com mais um vector de S. Repetindo este processo o número de vezes necessário, conseguimos obter uma base de W com todos os vectores de S. $\square$

Observação Qualquer conjunto linearmente independente com k vectores de um subespaço de $\mathbb{R}^n$, de dimensão k, é uma sua base.

Exemplo 6.10 1. *Sendo* $S = \{(1,1,1), (-2,-2,3)\}$ *um conjunto de vectores linearmente independente de* $\mathbb{R}^3$, *determinemos uma base de* $\mathbb{R}^3$ *que contenha os vectores de* S.

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *e que* $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *é a sua base canónica.*

Como

$$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1),$$

então o escalar que nesta combinação linear, que está associado ao vector $(1,0,0)$ *é não nulo, assim, pela demonstração do teorema naterior,*

$$C = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Como

$$(-2,-2,3) = -2(1,1,1) + 0(0,1,0) + 5(0,0,1),$$

então o escalar que nesta combinação linear (repare que os vectores são de C*), que está associado ao vector* $(0,0,1) \notin S$ *é não nulo, assim, pela demonstração do teorema naterior,*

$$D = \{(1,1,1),(0,1,0),(-2,-2,3)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ *que contém os vectores de* S.

2. *Seja*

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \; x+y+w=0\}$$

um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Porque W *é o conjunto-solução do sistema homogéneo* $x+y+w=0$*, então* W *é um subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *e*

$$W = < (1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,-1,0,1) > .$$

Vejamos como conseguimos obter uma base de W *que contenha os vectores do conjunto*

$$S = \{(3,0,0,-3),(1,-2,5,1)\}.$$

Repare que S *é subconjunto de* W.

Como

$$(3,0,0,-3) = 3(1,-1,0,0) + 0(0,0,1,0) - 3(0,-1,0,1),$$

então o escalar que nesta combinação linear, que está associado ao vector $(1,-1,0,0)$ *é não nulo, assim, pela demonstração do teorema naterior,*

$$C = \{(3,0,0,-3),(0,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$$

é uma base de W.

Como

$$(1,-2,5,1) = \frac{1}{3}(3,0,0,-3) + 5(0,0,1,0) + 2(0,-1,0,1),$$

então o escalar que nesta combinação linear, que está associado ao vector $(0,-1,0,1) \notin S$ *é não nulo, assim, pela demonstração do teorema naterior,*

$$D = \{(3,0,0,-3),(0,0,1,0),(1,-2,5,1)\}$$

é uma base de W *nas condições.*

Até aqui estudámos só subespaços de $\mathbb{R}^n$. Mas pode acontecer que W e V sejam dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ e que $V \subseteq W$. Nestas condições dizemos que V é **subespaço** de W.

Teorema 6.11 *Sejam W e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, sendo $V \subseteq W$. Então:*

1. $0 \leq \dim V \leq \dim W \leq n$.

2. $\dim V = \dim W$ *se, e só se,* $V = W$.

Demonstração

1. Seja $\mathcal{B}$ uma base de V. Então $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente de W. Pelo Teorema anterior, existe uma base de W, que contém os vectores de $\mathcal{B}$. Pela definição de dimensão,
$$0 \leq \dim V \leq \dim W \leq n.$$

2. Se $\dim V = \dim W$, então sendo $\mathcal{B}$ uma base de V, como $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente de W, podemos afirmar que existe uma base de W, $\mathcal{B}_1$, que contém os vectores de $\mathcal{B}$.

   Mas $\dim W = \dim V =$número de vectores de $\mathcal{B}$ e $\dim W =$número de vectores de $\mathcal{B}_1$. Então,
$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}.$$

   Porque $V =< \mathcal{B} >$ e $W =< \mathcal{B}_1 >$, então $W = V$.

   Se $V = W$ é evidente que $\dim V = \dim W$. □

O teorema que vamos abordar é conhecido como Teorema das dimensões. Ele relaciona as dimensões do núcleo e da imagem de uma aplicação linear f, com a dimensão do domínio da aplicação f.

Teorema 6.12 *Seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Então,*
$$\dim Nuc\ f + \dim Im\ f = n.$$

Demonstração Porque $Nuc\ f$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$,
$$\dim Nuc\ f \leq n.$$

Como $\mathbb{R}^n =< e_1, e_2, \ldots, e_n >$ em que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são os vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$, então (Proposição 5.18) $Im\ f =< f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) >$. Donde,
$$\dim Im\ f \leq n.$$

1^o **caso)** Se $f = 0$, então $Nuc\ f = \mathbb{R}^n$ e $Im\ f = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$. Pelo que o Teorema se verifica.

2^o **caso)** Suponhamos que $f \neq 0$. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_j\}$ uma base de $Nuc\ f$ e seja $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ que contem os vectores de $\mathcal{B}$. Porque $f \neq 0$, $\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B} \neq \emptyset$. Atendendo à Proposição 5.18,
$$f(\mathbb{R}^n) = Im\ f =< f(v_1), \ldots, f(v_j), \ldots, f(v_n) > .$$

Como $f(v_i) = 0_{\mathbb{R}^m}$ se $v_i \in \mathcal{B}$, então

$$Im\ f =< f(v_{j+1}), \ldots, f(v_n) > .$$

Vejamos que estes vectores são linearmente independentes.

Se existissem escalares $a_{j+1}, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que

$$a_{j+1}f(v_{j+1}) + \ldots + a_n f(v_n) = 0_{\mathbb{R}^m},$$

porque f é aplicação linear,

$$f(a_{j+1}v_{j+1} + \ldots + a_n v_n) = 0_{\mathbb{R}^m}.$$

Mas isto significava que

$$a_{j+1}v_{j+1} + \ldots + a_n v_n \in Nuc\ f =< v_1, \ldots, v_j > .$$

Então, existiriam escalares $b_1, \ldots, b_j$ tais que

$$a_{j+1}v_{j+1} + \ldots + a_n v_n = b_1 v_1 + \ldots + b_j v_j.$$

Donde,

$$b_1 v_1 + \ldots + b_j v_j + (-a_{j+1})v_{j+1} + \ldots + (-a_n)v_n = 0_{\mathbb{R}^n},$$

com algum dos $a_{j+1}, \ldots, a_n$ não nulo. Mas isto é impossível pois $\{v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, logo linearmente independente. Assim, $\{f(v_{j+1}), \ldots, f(v_n)\}$ é linearmente independente e portanto uma base de $Im\ f$. Consequentemente,

$$\dim Im\ f = n - j.$$

Porque $\dim Nuc\ f = j$, temos que

$$\dim Nuc\ f + \dim Im\ f = n.$$

□

6.4 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Em $\mathbb{R}^4$ considere o subespaço $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = -c,\ d = 0\}$. Uma base de F é o conjunto:

   A $\{(1, -1, 1, 0)\}$

   B $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

   C $\{(0, -1, 1, 0)\}$

   D $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0)\}$

2. Em $\mathbb{R}^3$ considere o subespaço $F =< (2, 1, 1), (-1, 0, 1), (5, 3, 4) >$. A dimensão de F é:

   A 0

$\boxed{\text{B}}$ 1

$\boxed{\text{C}}$ 2

$\boxed{\text{D}}$ 3

3. Em $\mathbb{R}^3$ considere o subespaço $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y,\ y = z\}$. A dimensão de G é:

   $\boxed{\text{A}}$ 0

   $\boxed{\text{B}}$ 1

   $\boxed{\text{C}}$ 2

   $\boxed{\text{D}}$ 3

4. Seja $W =< (-4, 0, 0), (3, 2, 0), (5, 0, 0) >$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Uma base de W é o conjunto:

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(-4, 0, 0), (3, 2, 0), (5, 0, 0)\}$

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(-4, 0, 0), (5, 0, 0)\}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(-4, 0, 0), (3, 2, 0)\}$

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(3, 2, 0)\}$

5. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ uma base do subespaço W de $\mathbb{R}^3$ e $u = (0, 5, 5) \in W$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(0, 5, 5), (0, 1, 1)\}$ é uma base de W que contem o vector u.

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ é uma base de W que contem o vector u.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(1, 2, 3), (0, 1, 1), (0, 5, 5)\}$ é uma base de W que contem o vector u.

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(1, 2, 3), (0, 5, 5)\}$ é uma base de W que contem o vector u.

6. Sejam u_1, u_2, u_3 vectores de $\mathbb{R}^n$, com $n > 3$, linearmente independentes e $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \notin \{u_1, u_2, u_3\}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\{u, u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente.

   $\boxed{\text{B}}$ Se $\{u, u_1, u_2, u_3\}$ gera $\mathbb{R}^n$, então $n = 4$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{u_1, u_2, u_3\}$ gera $\mathbb{R}^n$.

   $\boxed{\text{D}}$ Se u se escreve como combinação linear de u_1, u_2, então

   $$< u, u_2, u_3 >=< u_1, u, u_3 >=< u_1, u_2, u > .$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $Nuc(f) =< (1, 0, 0), (3, 2, 0), (5, 0, 0) >$. A dimensão da $Im(f)$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 3

   $\boxed{\text{B}}$ 1

   $\boxed{\text{C}}$ 0

   $\boxed{\text{D}}$ 2

8. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear tal que $Nuc(f) = \{(0, 0, 0)\}$. A dimensão da $Im(f)$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 3

   $\boxed{\text{B}}$ 1

$\boxed{\text{C}}$ 4

$\boxed{\text{D}}$ 2

9. Seja $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ uma aplicação linear. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\dim Im\ f + \dim Nuc\ f = 6$

   $\boxed{\text{B}}$ $\dim Im\ f + \dim Nuc\ f = 5$

   $\boxed{\text{C}}$ $\dim Im\ f - \dim Nuc\ f = 6$

   $\boxed{\text{D}}$ $-\dim Im\ f + \dim Nuc\ f = 6$

10. Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

    $\boxed{\text{A}}$ f é injectiva.

    $\boxed{\text{B}}$ Se f não é sobrejectiva, então $\dim Im\ f \leq \dim Nuc\ f$.

    $\boxed{\text{C}}$ Se f é sobrejectiva, então $\dim Nuc\ f = 0$.

    $\boxed{\text{D}}$ Se $\dim Nuc\ f \leq 2$, então $\dim Im\ f < \dim Nuc\ f$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, com $m > n$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

    $\boxed{\text{A}}$ Um conjunto com n vectores de $\mathbb{R}^m$ pode gerar $\mathbb{R}^m$.

    $\boxed{\text{B}}$ Um conjunto com m vectores de $\mathbb{R}^n$ pode ser linearmente independente.

    $\boxed{\text{C}}$ f não transforma uma base de $\mathbb{R}^n$ numa base de $\mathbb{R}^m$.

    $\boxed{\text{D}}$ f é sobrejectiva.

6.5 Coordenadas em Relação a uma Base

Sabemos escrever um vector de $\mathbb{R}^n$ como combinação linear dos vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Nesta secção veremos que os coeficientes desta combinação linear são distintos se mudarmos os vectores canónicos para outros vectores que formem uma base de $\mathbb{R}^n$.

Definição 6.13 *Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base ordenada (isto é, a ordem dos vectores em $\mathcal{B}$ é fixa), do subespaço W de $\mathbb{R}^n$. Se a única forma de escrever $u \in W$, como combinação linear dos vectores de $\mathcal{B}$ é*

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_kv_k,$$

dizemos que as **coordenadas** *de u na base $\mathcal{B}$ são*

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

ou que,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

é o $k-$uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Quando não houver lugar a confusão, diremos simplesmente coordenadas de u na base $\mathcal{B}$.

Observação Normalmente escrevemos

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

para designar um vector de $\mathbb{R}^n$. Como $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$ e

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,$$

então $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são as coordenadas de x na base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Se nada for dito, sempre que nos derem um vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, suporemos que são as coordenadas do vector na base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 6.14 *Seja $W =< (1,2,0),(0,1,2) >$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Facilmente se vê que*

$$\mathcal{B} = \{(1,2,0),(0,1,2)\}$$

é uma base de W (o conjunto $\mathcal{B}$ é linearmente independente e gera W).

Vejamos se $u = (2,0,-8)$ é um vector de W e, se for, quais as suas coordenadas na base $\mathcal{B}$.

O que pretendemos é encontrar, se existirem, escalares a_1 e a_2 tais que

$$u = (2,0,-8) = a_1(1,2,0) + a_2(0,1,2) = (a_1, 2a_1 + a_2, 2a_2).$$

Donde,

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_2 = -8 \end{cases}$$

ou seja, $a_1 = 2$, $a_2 = -4$. Portanto,

$$(2,-4)$$

é o $2-$uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}$.

Observação Se no exemplo anterior pedissem as coordenadas de u na base $\{(0,1,2),(1,2,0)\}$ de W (repare que esta base tem os vectores de $\mathcal{B}$ trocados), seria o $2-$uplo

$$(-4,2).$$

ATENÇÃO: É muito importante a ordenação da base.

6.6 Matriz de uma Aplicação Linear

Na secção 5.3 aprendemos a construir a matriz canónica de uma aplicação linear. Aqui veremos que a matriz canónica não é mais do que a matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas.

Definição 6.15 *Seja* $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *uma aplicação linear e sejam* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^m$. *Chamamos* **matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$**, *e denotamo-la por*

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'),$$

a matriz $A = [a_{ij}]$ *de tipo* $m \times n$, *cuja* $i-$*ésima coluna é o* $m-$*uplo de coordenadas de* $f(v_i)$ *na base* $\mathcal{B}'$, $i = 1, \ldots, n$. *Portanto,*

$$f(v_i) = a_{1i}v'_1 + \ldots + a_{mi}v'_m.$$

Exemplo 6.16 1. *Seja*

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\mapsto (x + 2y, 3y, -x + y) \end{aligned}$$

uma aplicação linear e sejam $\mathcal{B} = \{(2, 1), (0, 3)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Construamos a* $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Ora

$$\begin{aligned} f(2, 1) &= (4, 3, -1) = 4(1, 1, 1) - 1(0, 1, 0) - 5(0, 0, 1) \\ f(0, 3) &= (6, 9, 3) = 6(1, 1, 1) + 3(0, 1, 0) - 3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Assim,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 3 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Repare que a matriz canónica de f (*matriz de* f *em relação à base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *e à base canónica de* $\mathbb{R}^3$) *é*

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

pois

$$f(1, 0) = (1, 0, -1)$$

e

$$f(0, 1) = (2, 3, 1).$$

2. *Considere a aplicação linear*

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^2}: \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

e sejam $\mathcal{B} = \{(2, 1), (0, 3)\}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{B}_1$ *a base canónica de* $\mathbb{R}^2$. *Então,*

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

pois

$$id_{\mathbb{R}^2}(2,1) = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

e

$$id_{\mathbb{R}^2}(0,3) = (0,3) = 0(1,0) + 3(0,1),$$

e

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

pois

$$id_{\mathbb{R}^2}(1,0) = (1,0) = \frac{1}{2}(2,1) - \frac{1}{6}(0,3)$$

e

$$id_{\mathbb{R}^2}(0,1) = (0,1) = 0(2,1) + \frac{1}{3}(0,3).$$

6.7 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Seja $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,1,2), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,5)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e seja

$$u = 3u_3 - 5u_1 + 6u_2.$$

As coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ são:

$\boxed{\text{A}}$ $(3,-5,6)$

$\boxed{\text{B}}$ $(3,6,-5)$

$\boxed{\text{C}}$ $(-5,6,3)$

$\boxed{\text{D}}$ $(-5,3,6)$

2. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$u_1 = 6v_1 + v_2, \qquad u_2 = v_2 - v_3, \qquad u_3 = v_3.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $(1,-1,0)$ são as coordenadas de u_2 na base $\mathcal{B}'$.

$\boxed{\text{B}}$ $(1,0,0)$ são as coordenadas de $u_2 + u_3$ na base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{C}}$ $(1,-1,-1)$ são as coordenadas de v_1 na base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{D}}$ $(0,1,0)$ são as coordenadas de v_2 na base $\mathcal{B}'$.

3. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $f(1,1,2)$ é

$\boxed{\text{A}}$ $(0,1,2)$

$\boxed{\text{B}}$ $(0,3,2)$

$\boxed{\text{C}}$ $(1,0,1)$

$\boxed{\text{D}}$ $(3,-1,1)$

4. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A dimensão de $Im(f)$ é

$\boxed{\text{A}}$ 0

$\boxed{\text{B}}$ 1

$\boxed{\text{C}}$ 2

$\boxed{\text{D}}$ 3

5. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual dos seguintes vectores pertence à $Im(f)$?

$\boxed{\text{A}}$ $(-1,0,0)$

$\boxed{\text{B}}$ $(0,2,0)$

$\boxed{\text{C}}$ $(1,1,0)$

$\boxed{\text{D}}$ $(1,1,1)$

6. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma base de $Nuc(f)$ é

$\boxed{\text{A}}$ $\{(1,1,-1)\}$

$\boxed{\text{B}}$ $\{(1,1,0)\}$

$\boxed{\text{C}}$ $\{(-1,-2,1)\}$

$\boxed{\text{D}}$ $\{(1,0,0)\}$

7. Sejam f e g duas aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases de $\mathbb{R}^n$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ então $f(x) = g(x)$, para qualquer vector x de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $M(f;\mathcal{B}, b.c. \text{ de } \mathbb{R}^n) = M(g;\mathcal{B}', b.c. \text{ de } \mathbb{R}^n)$ então $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $M(f;\mathcal{B}, b.c. \text{ de } \mathbb{R}^n) = I_n$ então f é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = I_n$ então f é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$.

6.8 Matriz Mudança de Base

Sejam $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Duas perguntas se podem colocar:

- Qual a relação entre $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ e $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})$?
- Qual a relação entre $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e M_f?

São estas duas perguntas que iremos estudar a seguir.

Sejam $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Sendo u um vector de $\mathbb{R}^n$, vejamos como calcular $f(u)$ usando $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = [a_{ij}]$.

Seja $(b_1, \ldots b_n)$ o $n-$uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ (base de $\mathbb{R}^n$). Então,

$$u = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n.$$

Atendendo à Definição 6.15

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11} v'_1 + \ldots + a_{m1} v'_m \\ &\vdots \\ f(v_n) &= a_{1n} v'_1 + \ldots + a_{mn} v'_m. \end{aligned}$$

Então, usando a linearidade de f temos que

$$\begin{aligned} f(u) &= f(b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n) \\ &= b_1 f(v_1) + \ldots + b_n f(v_n) \\ &= b_1(a_{11} v'_1 + \ldots + a_{m1} v'_m) + \ldots + b_n(a_{1n} v'_1 + \ldots + a_{mn} v'_m) \\ &= (b_1 a_{11} + \ldots + b_n a_{1n}) v'_1 + \ldots + (b_1 a_{m1} + \ldots + b_n a_{mn}) v'_m \end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ são

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

em que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

O que acabámos de demonstrar foi o resultado seguinte:

Proposição 6.17 *Sejam $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Se $(b_1, \ldots, b_n)$ for o $n-$uplo de coordenadas* *de um vector u de $\mathbb{R}^n$, na base $\mathcal{B}$, então o $m-$uplo de coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ é $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ tal que*

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6.18 *Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear que tem como matriz relativamente às bases $\mathcal{B} = \{(1,1), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$,*

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $f(2,-1)$.

Como nada dissemos, supomos que $(2,-1)$ são as coordenadas do vector de $\mathbb{R}^2$ na sua base canónica.

Porque

$$(2,-1) = 2(1,1) - 3(0,1),$$

então

$$(2,-3)$$

são as coordenadas de $(2,-1)$ na base $\mathcal{B}$.

Ora, usando a Proposição 6.17,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$(-4, 2, -1)$$

são as coordenadas de $f(2,-1)$ na base $\mathcal{B}'$. Assim,

$$f(2,-1) = -4(1,1,1) + 2(0,1,1) - 1(0,0,1) = (-4,-2,-3).$$

Definição 6.19 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ duas bases de $\mathbb{R}^n$. Chamamos* **matriz de mudança de base** *$(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ à matriz*

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1).$$

Da proposição anterior concluímos que:

Corolário 6.20 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ duas bases de $\mathbb{R}^n$. Se $(b_1, \ldots, b_n)$ for o o $n-$uplo de coordenadas de um vector u de $\mathbb{R}^n$, na base $\mathcal{B}$, então o $n-$uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}_1$ é $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que*

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Observação Usando as hipóteses do Corolário 6.20, temos que

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = I_n \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Porque esta igualdade se obtém qualquer que seja $(b_1, \ldots, b_n)$, então,

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = I_n.$$

Pelo Lema 4.23,

$$M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)^{-1}.$$

Estamos agora em condições de responder à pergunta sobre a relação que existe entre as matrizes da mesma aplicação linear, mas relativamente a bases distintas.

Teorema 6.21 *Sejam $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ duas bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}'_1$ duas bases de $\mathbb{R}^m$. Então,*

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}).$$

Demonstração Queremos mostrar que

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = M(id_{\mathbb{R}^m}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1) M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) \qquad (*)$$

ou seja, que a matriz da aplicação linear $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ relativamente às bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'_1$ de $\mathbb{R}^m$ e a matriz da mesma aplicação linear f mas relativamente às bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^m$ se relacionam.

Construamos o diagrama destas aplicações da seguinta forma:

No topo do diagrama colocamos a aplicação $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e mencionamos que é relativamente às bases $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}'_1$ de $\mathbb{R}^m$ (bases da matriz que surge do lado esquerdo da igualdade $(*)$). Isto é,

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \\
\mathcal{B}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathcal{B}'_1
\end{tikzcd}$$

Na parte final do diagrama colocamos a mesma aplicação do topo do diagrama mas relativamente às bases em que surge a matriz desta aplicação do lado direito da igualdade $(*)$. Isto é,

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \\
\mathcal{B}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathcal{B}'_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
\mathcal{B} \arrow[r, mapsto] & \mathcal{B}' \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Do lado direito do diagrama colocamos a aplicação identidade de $\mathbb{R}^m$, em que o sentido da aplicação é do final do diagrama para o seu topo. Do lado esquerdo do diagrama colocamos a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$, em que o sentido da aplicação é do topo do diagrama para o seu final. Isto é,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^n}"'] & \mathbb{R}^m \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^m}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{matrix}
\mathcal{B}_1 \longmapsto \mathcal{B}'_1 \\
\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}'
\end{matrix}$$

Seja u um vector de $\mathbb{R}^n$ em que $(b_1, \ldots, b_n)$ é o $n-$uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ e $(c_1, \ldots, c_n)$ é o $n-$uplo de coordenadas de u na base $\mathcal{B}_1$. Sejam $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ o $m-$uplo de coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ o $m-$uplo de coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'_1$.

Usando a Proposição 6.17, temos que

$$M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1')\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, usando o Corolário 6.20 e a Proposição 6.17,

$$M(id_{\mathbb{R}^m};\mathcal{B}',\mathcal{B}_1')M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')M(id_{\mathbb{R}^n};\mathcal{B}_1,\mathcal{B})\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$M(id_{\mathbb{R}^m};\mathcal{B}',\mathcal{B}_1')M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

$$M(id_{\mathbb{R}^m};\mathcal{B}',\mathcal{B}_1')\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Donde o resultado. □

Exemplo 6.22 1. *Determinemos a matriz da aplicação linear*

$$f: \ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

em relação às bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{B}_1' = \{(0,1),(1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*, sabendo que*

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vamos construir o diagrama como descrito na demonstração do Teorema 6.21.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[ddd, "id_{\mathbb{R}^3}"'] & \mathbb{R}^2 \\
\mathcal{B}_1 \arrow[r, mapsto] & \mathcal{B}_1' \\
b.c. \arrow[r, mapsto] & b.c. \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[uuu, "id_{\mathbb{R}^2}"']
\end{tikzcd}$$

(*em que b.c. designa a base canónica*) *temos que,*

$$M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1') = M(id_{\mathbb{R}^2};b.c.,\mathcal{B}_1')M_f M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_1,b.c.).$$

Porque

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; b.c., \mathcal{B}_1') = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1', b.c.)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que

$$M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. *Determinemos a matriz da aplicação linear*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

em relação às bases $\mathcal{B} = \{(0,1),(1,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e à base canónica de* $\mathbb{R}^3$, *sabendo que a matriz canónica de* f *é*

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos construir o diagrama como descrito na demonstração do Teorema 6.21.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^3 \\
\mathcal{B} \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"'] \arrow[r, mapsto] & b.c. \\
b.c. \arrow[r, mapsto] & b.c. \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^3}"'] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

(*em que b.c. designa a base canónica*) *temos que,*

$$M(f; \mathcal{B}, b.c.) = M(id_{\mathbb{R}^3}; b.c., b.c.) M_f M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, b.c.).$$

Porque

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; b.c., b.c.) = I_3$$

temos que

$$M(f; \mathcal{B}, b.c.) = I_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

6.9 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c) = (2a+b, b-c),$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.
Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}_2 = \{(2,-1),(0,1)\}$. Sejam $\mathcal{B}_1'$ e $\mathcal{B}_2'$, respectivamente as bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{B}}$ $M(f;\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} M(f;\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2)$

$\boxed{\text{C}}$ $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $M(f;\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2) = M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que

$$A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1+v_2, v_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e considere as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $M(f : \mathcal{B}',\mathcal{B}) = PA$

$\boxed{\text{B}}$ $M(f : \mathcal{B}',\mathcal{B}) = AP$

$\boxed{\text{C}}$ $M(f : \mathcal{B}',\mathcal{B}) = QA$

$\boxed{\text{D}}$ $M(f : \mathcal{B}',\mathcal{B}) = AQ$

3. Para qualquer aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e para quaisquer quatro bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ e $\mathcal{B}_4$ de $\mathbb{R}^3$, se

$$A = M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_4),\ B = M(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3),\ C = M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\ e\ D = M(id_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4)$$

então:

$\boxed{\text{A}}$ $A = BCD$

$\boxed{\text{B}}$ $A = DBC$

$\boxed{\text{C}}$ $A = C^{-1}BD$

$\boxed{\text{D}}$ $A = CBD$

4. Em $\mathbb{R}^3$ considere as bases $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(0,1,1)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(1,2,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1)$ é

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -5 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6.10 Exercícios

1. Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores:

   a) $v_1 = (1, -3.4)$, $v_2 = (2, -6, 8)$, $v_3 = (1, 1, 0)$.
   b) $v_1 = (0, 3, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0)$.
   c) $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (1, 6, 4)$, $v_3 = (0, 3, 2)$.
   d) $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (2, 4, 2)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 2, -1)$.

2. Sem fazer contas, mostre que os seguintes vectores não formam uma base do espaço vectorial indicado:

   a) $v_1 = (2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$.
   b) $v_1 = (2, 3)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (4, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.
   c) $v_1 = (0, 2, 3)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 4, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
   d) $v_1 = (0, 2, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
   c) $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 4)$ de $\mathbb{R}^2$.

3. a) Mostre que os vectores $v_1 = (1, 0.0)$, $v_2 = (0, 4, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, $v_4 = (-1, 1, -1)$ geram $\mathbb{R}^3$ mas não formam uma sua base.
   b) Escreva o vector $(1, 2, 1)$, de três maneiras diferentes, como combinação linear dos vectores da alínea a).

4. Mostre que o conjunto formado pelos seguintes vectores é linearmente independente e determine uma base do espaço que inclua estes vectores:

   a) $v_1 = (0, 2, 3)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
   b) $v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
   c) $v_1 = (0, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.

5. Mostre que $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e escreva o vector $(2,1,2)$ como combinação linear dos vectores de S.
6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(x,y,z) = (x+y, y-2z, x+2y-2z, 0)$.
   a) Determine uma base de $Nucf$.
   b) Determine a dimensão de Imf.
7. Considere as base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(0,1,1),(1,1,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
   a) Determine as coordenadas do vector $u = (1,1,0)$ na base $\mathcal{B}$.
   b) Determine as coordenadas do vector $u = (1,1,0)$ na base $\mathcal{B}'$.
8. Determine uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $Nucf =< (1,0,3,0),(-1,2,0,0),$ $(0,2,3,0) >$ e $< (1,1,1,1),(0,0,1,1) > \subseteq Imf$.
9. Determine, se possível, uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Nuc(f) =< (1,0,0,0) >$.
10. Determine uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $Nuc(f) =< (1,1,0),(0,1,0) >$ e $Im(f) \supseteq< (1,2) >$.
11. Determine, se possível, uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Nuc(f) = \{(0,0)\}$ e $(1,0,0) \in Im(f)$.
12. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que $f(1,1,1) = (1,0,0,0)$, $f(0,1,1) = (1,2,0,0)$ e $f(0,0,2) = (4,2,0,0)$.
    a) Mostre que $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
    b) Determine as coordenadas do vector $(2,2,0)$ em relação à base $\mathcal{B}$.
    c) Calcule $f(2,2,0)$.
    d) Determine a matriz canónica de f.
    e) Determine $f(x,y,z)$, com $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
    f) Determine uma base de $Nucf$.
    g) Qual a dimensão de Imf?
13. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $f(1,1,1) = (2,1,-1)$, $f(0,1,1) = (1,0,2)$ e $f(0,1,2) = (4,0,8)$.
    a) Mostre que $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,1,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
    b) Determine as coordenadas do vector $(1,3,4)$ em relação à base $\mathcal{B}$.
    c) Calcule $f(1,3,4)$.
    d) Determine a matriz canónica de f.
    e) Determine $f(x,y,z)$, com $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
    f) Determine uma base de $Nucf$.
    g) Qual a dimensão de Imf?
14. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (3x-2y, 2x-y)$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.
15. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (-4x, x-y, y)$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.
16. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
    Sejam $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ e $b.c. = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (base canónica) duas bases de $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) $M(f;\mathcal{B},b.c.)$.

b) $M(f;b.c.,\mathcal{B})$.

c) $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

17. Sejam $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(1,0,0),(0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),$ $(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^4$. Considere a aplicação linear $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}1&1&0\\-2&1&-1\\0&2&1\\6&0&0\end{bmatrix}.$$

Determine:

a) $f(1,1,1)$.

b) se existir, um vector $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y,z)=(0,-1,1,0)$.

c) $M(f;b.c.\text{ de }\mathbb{R}^3,b.c.\text{ de }\mathbb{R}^4)$, em que b.c. significa base canónica.

18. Seja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c)=(-6a+3b,-6a+3b+8c),$$

para todo $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

(a) Determine uma base de $Nuc(f)$

(b) Determine uma base de $Im(f)$

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $Nuc(f)$

(d) Determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$, sendo $\mathcal{B}=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}_1=\{(2,-1),(0,1)\}$

19. Seja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(1,0,0)=(1,2),\ \ f(0,1,0)=(-2,-4)\ e\ f(0,0,2)=(0,2).$$

(a) Mostre que $\{(1,2),(0,2)\}$ é uma base da imagem de f.

(b) A aplicação f é sobrejectiva?

(c) Determine o núcleo de f e a sua dimensão.

(d) Considere em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$ e em $\mathbb{R}^2$ a base $\mathcal{B}'=\{(2,0),(1,1)\}$, determine a matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

20. Em $\mathbb{R}^3$ considere a base $\mathcal{B}=\{(0,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$. Seja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

Determine $f(x,y,z)$.

21. Mostre que se $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ é a aplicação nula, então a matriz de f em relação a quaisquer bases de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^m$ é a matriz nula.

22. Seja $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ uma aplicação linear injectiva. Mostre que se $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ então $\{f(v_1),f(v_2),\ldots,f(v_n)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 7

DIAGONALIZAÇÃO

Neste capítulo tentaremos encontrar soluções para o seguinte problema:

"Dada uma matriz quadrada de ordem n, A, quais os valores de λ, se existirem, para os quais existe uma matriz, não nula, X de tipo $n \times 1$ tal que

$$(\lambda I_n - A)X = 0?"$$

Abordaremos, também, o problema de encontrar aplicações lineares, para as quais existe uma base, em relação à qual a matriz da aplicação, é uma matriz diagonal.

7.1 Valores e Vectores Próprios de Matrizes

Nesta secção vamos estudar o primeiro problema que reescrito de outra forma é:

"Se A é uma matriz de ordem n, para que valores do escalar λ, se houver, existem matrizes não nulas, X, de tipo $n \times 1$ (matrizes coluna) tais que $AX = \lambda X$?"

Definição 7.1 *Sejam A uma matriz de ordem n e λ um escalar:*

1. *λ diz-se um* **valor próprio** *de A, se existir uma* **matriz** *coluna X, $n \times 1$,* **não nula**, *tal que $AX = \lambda X$.*

2. *Se λ é um valor próprio de A, cada* **matriz** *coluna,* **não nula**, *X, tal que $AX = \lambda X$ é denominada* **vector próprio** *de A associado a λ.*

Exemplo 7.2 *Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Rerare que a matriz coluna $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ *é não nula. Assim, 2 é valor próprio de A e* $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ *é vector próprio de A associado ao 2.*

A forma mais fácil de determinarmos os valores próprios de uma matriz é pensarmos que a equação

$$AX = \lambda X$$

é equivalente a

$$(\lambda I_n - A)X = 0 \qquad \text{(sistema homogéneo).}$$

Sabemos que um sistema homogéneo, se for possível e indeterminado, tem soluções diferentes da solução nula, ou seja, se a matriz simples do sistema não for invertível. Mas isto significa que

$$\det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Definição 7.3 *Seja A uma matriz de ordem n. Chama-se* **polinómio característico** *de A ao polinómio*

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Usando o que acabámos de mencionar, podemos concluir o seguinte Teorema.

Teorema 7.4 *Sejam A uma matriz de ordem n e λ um escalar. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *λ é valor próprio de A.*
2. $\det(\lambda I_n - A) = 0$.
3. *λ é raíz do polinómio característico de A.*
4. *O sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)X = 0$ é possível e indeterminado.*

Exemplo 7.5 *Sendo* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, *vejamos quais os seus valores próprios.*

O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) + 2 \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 + 2 = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) \end{aligned}$$

As raízes do polinómio característico são

$$\lambda = 0 \qquad\qquad \lambda = -1$$

que pelo Teorema 7.4 *são os valores próprios de A.*

Definição 7.6 *Sejam A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A, designamos por* **multiplicidade algébrica** *do valor próprio α e denotamos por*

$$ma(\alpha),$$

o número de vezes que α aparece como raíz de $p_A(\lambda)$ (polinómio característico de A).

Como um polinómio de grau n, com coeficientes reais tem n raízes, então sendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ os valores próprios de A, dois a dois distintos,

$$ma(\alpha_1) + ma(\alpha_2) + \ldots + ma(\alpha_s) = \text{ordem de } A = n.$$

Exemplo 7.7 *Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, o polinómio característico de A é*

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1,$$

cujas raízes são

$$\lambda = 1 \qquad e \qquad \lambda = -1.$$

Ou seja,

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Os valores próprios de A verificam

$$ma(1) = 1 \qquad e \qquad ma(-1) = 1$$

e

$$ma(1) + ma(-1) = 2 = \textit{ordem de } A.$$

Definição 7.8 *Sejam A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A. Chamamos* **subespaço próprio** *de A associado ao valor próprio α ao conjunto-solução do sistema homogéneo*

$$(\alpha I_n - A)X = 0.$$

Este conjunto é denotado por M_α.

Exemplo 7.9 *A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$* (Exemplo 7.5) *tem os valores próprios*

$$0 \qquad e \qquad -1,$$

cada um com multiplicidade algébrica 1.

Determinemos os subespaços M_0 e M_{-1}.

Ora sendo $\lambda = 0$ *vem*

$$M_0 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (0I_2 - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Porque

$$(0I_2 - A)X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vem que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to (l_2 + 2l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_1 \to -l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim,

$$x_1 + x_2 = 0,$$

ou seja, $x_1 = -x_2$, *pelo que*

$$M_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = -x_2\} = \{(-x_2, x_2) : \ x_2 \in \mathbb{R}\} =< (-1, 1) > .$$

Para $\lambda = -1$ *temos*

$$M_{-1} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (-I_2 - A)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Porque

$$(-I_2 - A)X = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vem que

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{l_2 \to (l_2 + l_1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{l_1 \to -\frac{1}{2}l_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

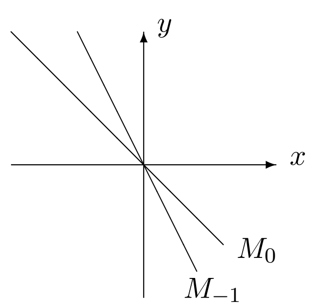
Donde,

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0,$$

ou seja, $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$, *e*

$$M_{-1} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = -\frac{1}{2}x_2\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}x_2, x_2\right) : \ x_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right\rangle.$$

Repare que qualquer um destes subespaços define uma recta que passa pela origem.



7.2 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine qual dos reais é valor próprio de A:

   $\boxed{\text{A}}$ 0

   $\boxed{\text{B}}$ 2

   $\boxed{\text{C}}$ -2

   $\boxed{\text{D}}$ -1

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine qual dos vectores é vector próprio de A:

   $\boxed{\text{A}}$ $(2, 0, 1)$

   $\boxed{\text{B}}$ $(0, 0, 1)$

   $\boxed{\text{C}}$ $(0, 0, 0)$

   $\boxed{\text{D}}$ $(0, 1, 1)$

3. O polinómio característico da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $(\lambda + 2)\lambda^2$

   $\boxed{\text{B}}$ $(\lambda - 2)\lambda^2$

   $\boxed{\text{C}}$ $(\lambda + 2)\lambda$

   $\boxed{\text{D}}$ $(\lambda - 2)\lambda$

4. Considere a matriz A quadrada cujo polinómio característico é

   $$(\lambda - 5)^2(\lambda + 3)^2(\lambda - 1).$$

   <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ 5 é valor próprio de A e $ma(5) = 2$.

   $\boxed{\text{B}}$ 3 não é valor próprio de A.

   $\boxed{\text{C}}$ A não é invertível.

   $\boxed{\text{D}}$ A é matriz de ordem 5.

5. Considere a matriz A quadrada de ordem n e seja 4 um valor próprio de A. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $|4I_n - A| = 0$.

   $\boxed{\text{B}}$ O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 4 tem dimensão maior ou igual a 1.

   $\boxed{\text{C}}$ O sistema $(4I_n - A)X = 0$ é possível e determinado.

   $\boxed{\text{D}}$ $(4I_n - A)0_{\mathbb{R}^n} = 0$.

7.3 Diagonalização de Matrizes Quadradas

Dada uma aplicação linear f de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, usando matrizes de mudança de base, podemos em certas ocasiões determinar uma base de $\mathbb{R}^n$, na qual a aplicação linear f tenha como sua matriz, uma matriz diagonal.

Definição 7.10 *Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Dizemos que A* **é semelhante a** *B, se existe uma matriz invertível P, de ordem n, tal que*

$$P^{-1}AP = B.$$

Observação Se A é semelhante a B, existe P invertível tal que $P^{-1}AP = B$. Mas então, $PBP^{-1} = A$ e podemos dizer que B é semelhante a A. Muitas vezes diz-se, simplesmente que A e B **são semelhantes**.

Exemplo 7.11 *As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Teorema 7.12 *Sejam A e B duas matrizes de ordem n. A e B são semelhantes se, e só se, existem bases em relação às quais as matrizes representam a mesma aplicação linear.*

Demonstração Suponhamos que as duas matrizes representam a mesma aplicação linear $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, sendo

$$A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) \qquad \text{e} \qquad B = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$$

em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_1$ são duas bases de $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 6.21,

$$B = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) A M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}).$$

Porque $M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})^{-1}$, então A e B são semelhantes.

Reciprocamente, se $B = P^{-1}AP$ para alguma matriz P de ordem n, seja $\mathcal{B}$ a base de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$P = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c.)$$

em que b.c. é a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Pela Proposição 5.9, seja $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear tal que $M_f = A$. Então,

$$B = M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c., \mathcal{B}) M_f M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c.).$$

Pelo Teorema 6.21,
$$B = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}),$$
ou seja, A e B representam a mesma aplicação linear f. $\square$

Exemplo 7.13 *Usando o* Exemplo 7.11, *em que* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *e supondo que A é a matriz canónica de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, então a aplicação linear é*
$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto\ (x-y,-x+3y) \end{aligned}$$
Pelo Teorema 7.12, *porque A e B são semelhantes, existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, tal que*
$$B = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}).$$
pela demonstração deste Teorema, *a base $\mathcal{B}$ determina-se usando uma matriz P tal que $B = P^{-1}AP$.*

Pelo Exemplo 7.11, *se* $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *então* $B = P^{-1}AP$.

Pelo que, sendo $P = M(id_{\mathbb{R}^n};\mathcal{B},b.c.)$, vem que
$$\mathcal{B} = \{(1,0),(2,1)\}$$
é a base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual B representa a aplicação f.

Proposição 7.14 *Matrizes semelhantes têm*

1. *o mesmo determinante.*
2. *o mesmo polinómio característico e portanto os mesmos valores próprios com as mesmas multiplicidades algébricas.*

Definição 7.15 *Seja A uma matriz de ordem n. A diz-se* **diagonalizável** *se A é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz P invertível e uma matriz diagonal D tais que*
$$A = P^{-1}DP.$$
A matriz P diz-se a matriz **diagonalizante** *de A.*

Observação Na definição anterior poderíamos dizer que A é diagonalizável se existe uma matriz P invertível e uma matriz diagonal D tais que
$$PAP^{-1} = D.$$

Proposição 7.16 *Sejam A uma matriz de ordem n diagonalizável, P uma matriz invertível e* $D = \begin{bmatrix} d_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$ *uma matriz diagonal tais que $P^{-1}DP = A$. Então,*

1. *cada d_i, $i = \{1, \dots, n\}$, é um valor próprio de A.*

2. *a matriz P^{-1} tem como suas colunas, n vectores próprios de A, linearmente independentes, cada um deles associado,respectivamente, a $d_1, \dots, d_n$.*

Demonstração Porque $P^{-1}DP = A$ então $AP^{-1} = P^{-1}D$. Seja C_1 a primeira coluna de P^{-1} (P^{-1} é invertível, então C_1 não é uma coluna nula). Mas a primeira coluna de $P^{-1}D$ é d_1C_1, então,

$$AC_1 = d_1C_1,$$

ou seja, C_1 é um vector próprio de A associado ao valor próprio d_1.

O mesmo acontece com as outras colunas de P^{-1}.

Atendendo ao processo descrito depois do Teorema 6.12 e porque P^{-1} é invertível, podemos afirmar que a matriz P^{-1} tem como suas colunas, n vectores próprios de A, linearmente independentes, cada um deles associado, respectivamente, a $d_1, \dots, d_n$. □

Definição 7.17 *Seja A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A, chamamos* **multiplicidade geométrica** *de α, e denotamos por*

$$mg(\alpha),$$

à dimensão do subespaço próprio associado ao valor próprio α, isto é,

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Proposição 7.18 *Sejam A uma matriz de ordem n e α um valor próprio de A. Então,*

$$1 \leq mg(\alpha) \leq ma(\alpha).$$

Demonstração Suponhamos que $mg(\alpha) = s$ e seja $\{v_1, \dots, v_s\}$ uma base de M_α, temos $s \geq 1$ pois, por definição de vector próprio, M_α não é o subespaço nulo . Pelo Teorema 6.9, existem vectores $u_{s+1}, \dots, u_n$ de $\mathbb{R}^n$ tais que

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^n$. Pela Proposição 5.9, seja f a aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $M_f = A$.

Porque $Av_i = \alpha v_i$, $i = 1, \dots, s$, então

$$f(v_i) = \alpha v_i,$$

$i = 1, \dots, s$. Consequentemente,

$$B = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & s & \end{array} \\ s & \left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & \ldots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \ldots & \alpha & \\ \hline & & & \\ & 0 & & C \\ & & & \end{array}\right] \end{array}$$

Como B é semelhante a A (Teorema 7.12) e α é valor próprio de B com multiplicidade algébrica $\geq s$, então

$$ma(\alpha) \geq s = mg(\alpha).$$

□

Proposição 7.19 *Se $v_1, \ldots, v_k$ são vectores próprios de A associados aos valores próprios distintos $\alpha_1, \ldots \alpha_k$, então o conjunto $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.*

Demonstração Suponhamos que $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente dependente e seja $S' = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ um subconjunto de S, linearmente independente, maximal. Porque $S \backslash S' \neq \emptyset$, seja $v_j \in S \backslash S'$. Então v_j é combinação linear dos vectores de S', ou seja, existem $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ escalares tais que

$$v_j = a_{i_1} v_{i_1} + \ldots + a_{i_r} v_{i_r}.$$

Se pensarmos nos vectores como matrizes coluna, então

$$Av_j = A(a_{i_1} v_{i_1} + \ldots + a_{i_r} v_{i_r}) = a_{i_1} A v_{i_1} + \ldots + a_{i_r} A v_{i_r}.$$

Donde, $\alpha_j v_j = a_{i_1} \alpha_{i_1} v_{i_1} + \ldots + a_{i_r} \alpha_{i_r} v_{i_r}$, ou seja,

$$0 = a_{i_1}(\alpha_{i_1} - \alpha_j) v_{i_1} + \ldots + a_{i_r}(\alpha_{i_r} - \alpha_j) v_{i_r}.$$

Como $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ são distintos e S' é linearmente independente então $a_{i_1} = \ldots = a_{i_r} = 0$ e $v_j = 0$. Mas isto é impossível pois v_j é vector próprio de A, logo não nulo. □

Teorema 7.20 *Seja A uma matriz de ordem n. A é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é n.*

Demonstração Suponhamos que A é diagonalizável, então existe uma matriz P invertível tal que

$$A = P^{-1} D P$$

em que D é matriz diagonal. Sendo $D = \begin{bmatrix} d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix}$ então $d_1, \ldots, d_n$ são os valores próprios de D, logo os de A.

Sejam $v_1, \ldots, v_n$ as colunas da matriz P^{-1} (já sabemos que são vectores próprios de A), então

$$P^{-1}D = \left[\, d_1v_1 \ d_2v_2 \ \ldots \ d_nv_n \,\right].$$

De $A = P^{-1}DP$ vem que $AP^{-1} = P^{-1}D$ e daqui sai que

$$A[v_i] = [d_iv_i]$$

ou seja, v_i é vector próprio de A associado ao valor próprio d_i.

Como P^{-1} é invertível, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, formada por vectores próprios de A. Se $d_{i_1}, \ldots, d_{i_r}$ são os valores próprios distintos de A, porque

$$ma(d_{i_j}) \geq mg(d_{i_j})$$

(Proposição 7.18), então

$$\sum_{j=1}^{r} mg(d_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{r} ma(d_{i_j}) = n$$

ou seja, o conjunto formado pelos vectores de uma base de cada M_{α_i} tem no máximo n vectores. Como $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tem n vectores, então

$$\sum_{j=1}^{r} mg(d_{i_j}) = n.$$

Reciprocamente, sejam $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ os valores próprios de A e seja

$$\mathcal{B}_i = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_{r_i}}\}$$

uma base do subespaço próprio M_{α_i}, $i = 1, \ldots, k$. Consideremos o conjunto $\mathcal{B}$ formado pelos vectores de cada $\mathcal{B}_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Se $\mathcal{B}$ fosse linearmente dependente, existiriam escalares, $a_{11}, \ldots, a_{1r_1}, \ldots, a_{k1}, \ldots, a_{kr_k}$, não todos nulos, tais que

$$0 = a_{11}v_{11} + \ldots + a_{1r_1}v_{1r_1} + \ldots + a_{k1}v_{k1} + \ldots + a_{kr_k}v_{kr_k}.$$

Sendo

$$t_i = a_{i1}v_{i1} + \ldots + a_{ir_i}v_{ir_i}$$

então t_i pertence a M_{α_i}. Donde,

$$0 = t_1 + \ldots + t_k.$$

Os vectores $t_1, \ldots, t_k$ pertencem a subespaços próprios distintos, então, pela Proposição 7.19, $t_1 = 0, \ldots, t_k = 0$. Mas então,

$$0 = t_i = a_{i1}v_{i1} + \ldots + a_{ir_i}v_{ir_i}$$

e porque $\mathcal{B}_i$ é uma base de M_{α_i}, $a_{i1} = \ldots = a_{ir_i} = 0$, para $i = 1, \ldots, k$. Ou seja, temos uma situação impossível. Portanto, $\mathcal{B}$ é linearmente independente.

Porque $\sum_{i=1}^{k} mg(\alpha_i) = n$, então $\mathcal{B}$ tem n vectores. Consequentemente, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Se $P^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1r_1} & \cdots & v_{k1} & \cdots v_{kr_k} \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} AP^{-1} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 v_{11} & \cdots & \alpha_1 v_{1r_1} & \cdots & \alpha_k v_{k1} & \cdots \alpha_k v_{kr_k} \end{bmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde, $A = P^{-1}DP$ com $D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix}$. □

Exemplo 7.21 *Vejamos se* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável e se for, determinemos uma matriz diagonalizante.*

Calculemos os valores próprios de A:

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) + 2(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1).$$

Então 2 *e* 1 *são os valores próprios de A e*

$$ma(2) = 2, \qquad ma(1) = 1.$$

Vejamos os subespaços próprios. Por definição,

$$M_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2I_3 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$2I_3 - A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{l_2 \to (l_2 + \frac{1}{2} l_1) \\ l_3 \to (l_3 + \frac{1}{2} l_1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -z\} = \langle (-1, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle.$$

Como $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ *é linearmente independente, pois*

$$r \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

então $\{(-1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ *é uma base de* M_2.

$$M_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (I_3 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{l_2 \to (l_2+l_1) \\ l_3 \to (l_3+l_1)}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2z, \quad y = z\} = \langle(-2,1,1)\rangle.$$

Como $(-2,1,1) \neq (0,0,0)$ *então é linearmente independente, logo* $\{(-2,1,1)\}$ *é uma base de* M_1*. Então,* $mg(2) = 2$*,* $mg(1) = 1$*. Assim,*

$$mg(2) + mg(1) = 3 = \text{ordem A}$$

e A é diagonalizável (Teorema 7.20)*. Sendo*

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (*matriz formada pelos vectores das bases de* M_2 *e* M_1 *em colunas*)

então, P diagonaliza A.

Observação No exemplo anterior,

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz produto é esta porque a primeira coluna da matriz P^{-1} é um vector da base de M_2 (associado ao valor próprio 2). Logo, a posição $(1,1)$ da matriz PAP^{-1} é 2. A segunda coluna da matriz P^{-1} é um vector da base de M_2 (associado ao valor próprio 2). Logo, a posição $(2,2)$ da matriz PAP^{-1} é 2. A terceira coluna da matriz P^{-1} é um vector da base de M_1 (associado ao valor próprio 1). Logo, a posição $(3,3)$ da matriz PAP^{-1} é 1.

Se tivessemos escolhido a matriz $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ então a primeira coluna da matriz Q^{-1} é um vector da base de M_2 (associado ao valor próprio 2). Logo, a posição $(1,1)$ da matriz QAQ^{-1} é 2. A segunda coluna da matriz Q^{-1} é um vector da base de M_1 (associado ao valor próprio 1). Logo, a posição $(2,2)$ da matriz QAQ^{-1} é 1. A terceira coluna da matriz Q^{-1} é um vector da base de M_2 (associado ao valor próprio 2). Logo, a posição $(3,3)$ da matriz QAQ^{-1} é 2. Portanto,

$$QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

7.4 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ A e C são matrizes semelhantes.

$\boxed{\text{B}}$ B e C são matrizes semelhantes.

$\boxed{\text{C}}$ A e B têm os mesmos valores próprios.

$\boxed{\text{D}}$ A e C têm os mesmos valores próprios.

2. Uma matriz A de ordem 3 tem os valores próprios 2 e -3, sendo $(0, 2, 0)$ um vector próprio associado ao valor próprio 2 e, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ vectores próprios associados ao valor próprio -3. Se $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então

$\boxed{\text{A}}$ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{B}}$ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{C}}$ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{D}}$ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira:

$\boxed{\text{A}}$ $ma(1) = mg(1) = 1$

$\boxed{\text{B}}$ $ma(1) = 2,\ mg(1) = 1$

$\boxed{\text{C}}$ $ma(1) = mg(1) = 2$

$\boxed{\text{D}}$ $ma(1) = 1,\ mg(1) = 2$

4. Sejam A, B e C matrizes quadradas. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Qualquer matriz quadrada é semelhante a si própria.

$\boxed{\text{B}}$ Se A é semelhante a B e B é semelhante a C, então A é semelhante a C.

$\boxed{\text{C}}$ Se A e B são invertíveis e semelhantes, então A^{-1} e B^{-1} são semelhantes.

$\boxed{\text{D}}$ Se A é invertível, então A e A^{-1} são semelhantes.

5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se cada valor próprio de A tem multiplicidade algébrica 1, então A é diagonalizável.

   $\boxed{\text{B}}$ Matrizes singulares não são diagonalizáveis.

   $\boxed{\text{C}}$ Se A é diagonalizável e invertível, então A^{-1} é diagonalizável.

   $\boxed{\text{D}}$ Se A é diagonalizável, então $A + I_n$ é diagonalizável.

7.5 Exercícios

1. Diga quais dos seguintes vectores são vectores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Em caso afirmativo, indique o valor próprio correspondente.

   a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Verifique se $\lambda = 1$ é ou não valor próprio de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Se possível, dê exemplos de:

   a) Uma matriz A de ordem 3 tal que $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ seja vector próprio de A.

   b) Uma matriz de ordem 3 que admita o valor próprio 0.

   c) Uma matriz cujo polinómio característico seja $x^2 + 5x$.

   d) Uma matriz, não nula, de ordem 3 que tenha 2 como único valor próprio.

   e) Uma matriz de ordem 5 que admita o valor próprio 2 com multiplicidade algébrica 3 e o valor próprio 8 com multiplicidade algébrica 2.

4. Para cada uma das matrizes seguintes encontre os valores próprios e os respectivos subespaços próprios.

   a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. Seja A uma matriz de ordem n. Mostre que
   A é invertível se, e só se, zero não é valor próprio de A.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine os valores próprios de A e os respectivos subespaços próprios.

7. Mostre que A e B não são matrizes semelhantes:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não são semelhantes.

9. Mostre que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ não são semelhantes.

10. Seja A uma matriz cujo polinómio caracteristico é

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2.$$

    Determine:

    a) o tamanho de A.

    b) os valores próprios de A e suas multiplicidades algébricas.

    c) quais as possíveis multiplicidades geométricas dos valores próprios de A.

11. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine os valores próprios de A e as suas multiplicidades algébricas e geométricas.

12. Determine se A é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$.

    a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

    b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

    c) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

    d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

    e) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

13. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. Determine uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

COMENTÁRIO: Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear e, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são duas bases de $\mathbb{R}^n$, então as matrizes $M(f : \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $M(f : \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ são semelhantes. Assim, têm os mesmos valores próprios com as mesmas multiplicidades algébricas e geométricas, pelo que podemos afirmar que esses valores próprios são os de f com essas multiplicidades algébricas e geométricas. Da mesma forma afirmamos que f é diagonalizável se, e só se, $M(f : \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é diagonalizável, sendo $\mathcal{B}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^n$.

14. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (-2x + y - z, x - 2y - z, -x - y - 2z).$$

Determine os valores próprios de f e mostre que f é diagonalizável.

15. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (-y + z, -x + z, x - y)$. Determine os valores próprios de f e mostre que f é diagonalizável.

16. Mostre que se A é uma matriz de ordem n diagonalizável, então A^k é diagonalizável, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

17. Determine se A é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma matriz P que diagonalize A e calcule $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

18. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

(c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (x, x - y, x + y + z)$, para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) Os valores próprios de f.

(b) Se f é diagonalizável.

20. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Determine:

   (a) Os valores próprios de A.

   (b) Os subespaços próprios de A.

   (c) Se a matriz A é diagonalizável.

21. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine:

   (a) Os valores próprios de A.

   (b) $mg(1)$.

   (c) Os subespaços próprios de A.

   (d) Se a matriz A é diagonalizável.

22. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique o polinómio característico de A.

   (b) Determine os subespaços próprios de A.

   (c) Mostre que A é diagonalizável.

   (d) Determine uma matriz P de ordem 3, invertível e uma matriz diagonal D, de ordem 3, tais que
   $$P^{-1}AP = D.$$

23. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

   (b) Determine os subespaços próprios de A.

   (c) Mostre que A é diagonalizável.

   (d) Determine uma matriz P de ordem 3, invertível e uma matriz diagonal D, de ordem 3, tais que
   $$P^{-1}AP = D.$$

24. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(x, y, z, w) = (x + w, y - z, 2z, 4w)$, para todo o $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Determine:

   (a) Os valores próprios de f.

   (b) Se f é diagonalizável.

25. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x + y, -4x - 2y)$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$. Verifique se f é diagonalizável.

Capítulo 8

ESPAÇOS VECTORIAIS

Como último capítulo deste manual e a título de resumo, iremos generalizar os conceitos e resultados que introduzimos para $\mathbb{R}^n$, a outros conjuntos.

8.1 Conceitos principais

Comecemos pela definição que vai uniformizar os conjuntos que podem generalizar $\mathbb{R}^n$.

Definição 8.1 *Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$. Suponhamos definidas duas operações:*

- *uma, designada por* **adição** *em E, que associa a cada par (u, v) de elementos de E um, e um só, elemento de E que é representado por $u + v$;*
- *outra, designada por* **multiplicação externa***, que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada $u \in E$ associa um, e um só, elemento de E que é representado por $\alpha.u$ ou αu.*

Dizemos que E, com estas duas operações, é um **espaço vectorial sobre** $\mathbb{K}$*, ou que, $(E, +, .)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, se*

1. *A* **adição** *em E verifica*

   A1) *a operação $+$ é associativa*

   A2) *a operação $+$ é comutativa*

   A3) *existe elemento neutro para a operação $+$*

   A4) *todo o elemento de E tem oposto para a operação $+$*

2. *A* **multiplicação externa** *verifica*

   M1) $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in E$, $\qquad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

M2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \qquad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

M3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \qquad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M4) $\forall u \in E, \qquad 1.u = u \qquad$ (*sendo 1 o número real*)

Definição 8.2 *Seja* $(E, +, .)$ *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$.
Aos elementos de E *chamamos* **vectores**.
Aos elementos de $\mathbb{K}$ *chamamos* **escalares**.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *dizemos que* E *é um* **espaço vectorial real**.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *dizemos que* E *é um* **espaço vectorial complexo**.

Exemplo 8.3

1. *Como podemos observar, a definição de espaço vectorial é baseada nas propriedades das operações em* $\mathbb{R}^n$, *então* $\mathbb{R}^n$ *é um espaço vectorial real.*

2. *Uma forma de generalizar* $\mathbb{R}^n$ *é pensarmos no conjunto de todas as sequências infinitas de números reais, isto é, elementos da forma*

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$$

em que $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *são números reais. Este conjunto é designado por* $\mathbb{R}^\infty$.

Assim como em $\mathbb{R}^n$, *somamos dois elementos desta forma ou multiplicamos um real por um elemento destes, pelo que podemos afirmar que* $(\mathbb{R}^\infty, +, .)$ *é um espaço vectorial real.*

3. *Designando por* $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ *o conjunto das matrizes de tipo* $n \times m$ *com entradas reais e considerando a adição de matrizes e o produto de um número real por uma matriz, podemos dizer que* $(M_{n\times m}(\mathbb{R}), +, .)$ *é um espaço vectorial real.*

4. *Sendo* $\mathbb{R}_n[x]$ *o conjunto de todos os polinómios na variável* x, *com coeficientes reais, de grau menor ou igual a* n, *com* $n \in \mathbb{N}_0$, *isto é,*

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 : a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\},$$

e definindo as operações

$$\forall (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0),\ (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0) \in \mathbb{R}_n[x], \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$\alpha(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = (\alpha a_n)x^n + \ldots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$$

temos que $\mathbb{R}_n[x]$ *é um espaço vectorial real.*

5. *Sendo* $\mathbb{R}[x]$ *o conjunto de todos os polinómios na variável* x*, com coeficientes reais (sem restrição de grau) e com as operações generalizadas de* $\mathbb{R}_n[x]$*, então,* $(\mathbb{R}[x], +, .)$ *é um espaço vectorial real.*

Todos os exemplos anteriores, alterando em cada caso o conjunto E *e/ou o conjunto* $\mathbb{K}$*, dão origem a outros espaços vectoriais:*

6. $(\mathbb{C}^n, +, .)$ *é um espaço vectorial real.*
7. $(\mathbb{C}^\infty, +, .)$ *é um espaço vectorial real.*
8. $(M_{n\times m}(\mathbb{C}), +, .)$ *é um espaço vectorial real.*
9. $(\mathbb{C}_n[x], +, .)$ *é um espaço vectorial real.*
10. $(\mathbb{C}[x], +, .)$ *é um espaço vectorial real.*

Mas também,

11. $(\mathbb{C}^n, +, .)$ *é um espaço vectorial complexo.*
12. $(\mathbb{C}^\infty, +, .)$ *é um espaço vectorial complexo.*
13. $(M_{n\times m}(\mathbb{C}), +, .)$ *é um espaço vectorial complexo.*
14. $(\mathbb{C}_n[x], +, .)$ *é um espaço vectorial complexo.*
15. $(\mathbb{C}[x], +, .)$ *é um espaço vectorial complexo.*

O que não é verdade é que algum dos espaços vectoriais reais 1. a 5., seja um espaço vectorial complexo.

Por exemplo, em 1., com $n = 3$, temos $(1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ e $i \in \mathbb{C}$ mas

$$i(1, 2, -1) = (i, 2i, -i) \notin \mathbb{R}^3,$$

isto é, $\mathbb{R}^3$ não é "fechado"para a multiplicação de um número complexo (que não é real) por um vector de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 8.4 *Sejam* $(E, +, .)$ *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$*,* $u, v \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$*. Então:*

1. $\alpha 0_E = 0_E$*;*
2. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$*;*
3. $(-\alpha)u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$*;*
4. $\alpha u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$*.*

Demonstração

1. Temos, por M1), $\alpha 0_E = \alpha(0_E + 0_E) = \alpha 0_E + \alpha 0_E$. Então, $0_E = \alpha 0_E - \alpha 0_E = \alpha 0_E + \alpha 0_E - \alpha 0_E = \alpha 0_E$.

3. Vejamos que $(-\alpha)u = -(\alpha u)$.

   Porque, por M2), $(-\alpha)u + \alpha u = (-\alpha + \alpha)u = 0_{\mathbb{K}} u = 0_E$, então temos o resultado.

4. Vejamos que se $\alpha u = 0_E$, então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$.

   Se $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$, temos o resultado.

   Se $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, então existe α^{-1} e

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1} 0_E = 0_E.$$

   Por M3), $\alpha^{-1}(\alpha u) = (\alpha^{-1}\alpha)u = 1u = u$, por M4).

   Donde, $u = 0_E$. □

Definição 8.5 *Se W é um subconjunto não vazio de um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$ e se W, com as duas operações definidas em E, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, dizemos que W é um* **subespaço vectorial** *de E, ou simplesmente, um subespaço de E.*

Observação Repare que as propriedades A1) a A4) e M1) a M4) não dependem de W, então podemos estabelecer o próximo resultado.

Teorema 8.6 *Sejam $(E, +, .)$ um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subconjunto não vazio de E. Então, W é subespaço de E se, e só se,*

1. $\forall u, v \in W, \qquad u + v \in W$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in W, \qquad \alpha u \in W.$

Exemplo 8.7 1. $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *é um subespaço do espaço vectorial de* **real** $(\mathbb{C}^n, +, .)$.

2. $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *não é um subespaço do espaço vectorial de* **complexo** $(\mathbb{C}^n, +, .)$ (*a condição* 2. *do* Teorema 8.6 *não se verifica*).

Observação As definições de combinação linear, independência linear, conjunto gerador e base são análogas às dadas em $\mathbb{R}^n$. Assim como o processo de resolução de sistemas de equações lineares com coeficientes em $\mathbb{C}$ é análogo ao dado quando os coeficientes eram em $\mathbb{R}$.

Exemplo 8.8 1. *As matrizes*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base do espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (*chamada base canónica de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$), *pois qualquer matriz de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$$

e se

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

usando a igualdade de matrizes, temos que, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Então, $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ *e* $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle$.

2. *O espaço vectorial real* $\mathbb{R}_2[x]$ *é gerado pelos polinómios*

$$x^2, x, 1$$

(*estes três polinómios formam a base canónica de* $\mathbb{R}_2[x]$), *pois qualquer polinómio de* $\mathbb{R}_2[x]$ *é da forma*

$$a_2x^2 + a_1x + a_0.1$$

(*escreve-se como combinação linear de* $x^2, x, 1$).

Se $\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.1 = 0 = 0x^2 + 0x + 0.1$, *então*

$$\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.$$

Assim, $\mathbb{R}_2[x] = \langle x^2, x, 1 \rangle$ *e* $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.

3. *O espaço vectorial* **complexo** $\mathbb{C}^2$ *é gerado pelos vectores*

$$e_1 = (1, 0), \ \ e_2 = (0, 1)$$

pois qualquer vector de $\mathbb{C}^2$

$$(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) = (a_1 + b_1 i)(1, 0) + (a_2 + b_2 i)(0, 1)$$

(*é combinação linear de* e_1 *e* e_2).

Se $\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = (0, 0)$ *então* $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$ *e* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Neste caso, $\mathbb{C}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$ *e* $\dim \mathbb{C}^2 = 2$.

4. *Vejamos agora* $\mathbb{C}^2$ *como espaço vectorial* **real**.

Neste caso, $\mathbb{C}^2$ *é gerado pelos vectores*

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (i, 0), v_3 = (0, 1), v_4 = (0, i)$$

pois

$$(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i) = a_1 v_1 + b_1 v_2 + a_2 v_3 + b_2 v_4.$$

Se $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0)$*, então*

$$(\alpha_1 + \alpha_2 i, \alpha_3 + \alpha_4 i) = (0,0) = (0 + 0i, 0 + 0i).$$

Porque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *são reais, então* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Donde,

$\mathbb{C}^2 = \langle (1,0), (i,0), (0,1), (0,i) \rangle$ *e* $\dim \mathbb{C}^2 = 4$.

Observação A respeito da dimensão de um espaço vectorial, ter sempre presente que:

Definição 8.9 *Um espaço vectorial E é de* **dimensão finita** *se tem uma base com um número finito de vectores e é de* **dimensão infinita** *caso contrário.*

Exemplo 8.10 *O espaço vectorial* $\mathbb{R}[x]$ *é de* **dimensão infinita***. Vejamos como se demonstra esta afirmação.*

Se $\mathbb{R}[x]$ *fosse de dimensão finita, existia uma base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}[x]$ *com um número finito de polinómios. Seja n o maior grau dos polinómios de* $\mathcal{B}$*. Então,* $x^{n+1} \notin \mathcal{B}$ *e não se escreve como combinação linear dos elementos de* $\mathcal{B}$*. No entanto,* $x^{n+1} \in \mathbb{R}[x]$. □

Os resultados de $\mathbb{R}^n$ que envolvem a sua dimensão, são válidos para espaços vectoriais de dimensão finita. Por exemplo:

Teorema 8.11 *Todas as bases de um espaço vectorial de dimensão finita têm o mesmo número de vectores.*

8.2 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   [A] O conjunto das matrizes triangulares superiores de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   [B] O conjunto das matrizes invertíveis de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ não é um subespaço vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   [C] O conjunto das matrizes simétricas de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um subespaço vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   [D] O conjunto das matrizes idempotentes de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (isto é, o conjunto das matrizes $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = A$) é um subespaço vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

2. No espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ considere o seguinte conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ S é linearmente independente.

$\boxed{\text{B}}$ O subespaço gerado por S é $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{C}}$ A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\boxed{\text{D}}$ $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$

3. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & 2a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. indique qual das afirmações seguintes é falsa:

$\boxed{\text{A}}$ S é um subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{B}}$ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto linearmente independente de S.

$\boxed{\text{C}}$ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto linearmente independente de S.

$\boxed{\text{D}}$ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de S.

4. No espaço vectorial real $\mathbb{R}_2[x]$ considere os subespaços:

$$F =< x^2 + x + 2, x + 1 > \qquad G = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : \ a + b = 0\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $G =< x^2 - x, 1, x^2 - x + 6 >$

$\boxed{\text{B}}$ $\{x^2 - x, 1\}$ é uma base de G.

$\boxed{\text{C}}$ $2x^2 - 2x + 3 \in (F \cap G)$

$\boxed{\text{D}}$ $dim(F) = 2$

5. No espaço $\mathbb{R}_3[x]$ considere o subespaço $G =< x^3 + 2x, 2x^3 + 4x + 1 >$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \ b = 0\}$

$\boxed{\text{B}}$ $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \ c = 2a\}$

$\boxed{\text{C}}$ $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \ b = 0, \ c = 2a\}$

$\boxed{\text{D}}$ $G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \ b = 0 \ ou \ c = 2a\}$

6. Em $\mathbb{R}_2[x]$ o conjunto

$$T = \{x^2 - 4x, ax^2 + 8, 3x + 2\}$$

não é um conjunto linearmente independente para

$\boxed{\text{A}}$ $a = 4$

$\boxed{\text{B}}$ $a = 1$

$\boxed{\text{C}}$ $a = 2$

$\boxed{\text{D}}$ $a = 3$

8.3 Aplicações Lineares

As definições e os resultados apresentados no capítulo 5 (Aplicações Lineares) podem ser aplicados a um espaço vectorial arbitrário. No entanto, temos que ter em atenção que sempre que estejam presentes dois espaços vectoriais, eles têm que ser espaços vectoriais sobre o mesmo conjunto $\mathbb{K}$. Por exemplo:

Definição 8.12 *Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre o mesmo conjunto $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação. Então, f diz-se* **aplicação linear** *se*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$;
2. $\forall u, u' \in E, \quad f(u + u') = f(u) + f(u')$.

Definição 8.13 *Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre o mesmo conjunto $\mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Dizemos que E é* **isomorfo** *a E' se f é bijectiva.*

Observação Se E é isomorfo a E', então existe uma aplicação $f : E \longrightarrow E'$, linear e bijectiva. Mas atendendo à Proposição 5.23,

$$f^{-1} : E' \longrightarrow E$$

é aplicação linear e bijectiva. Então, E' é **isomorfo** a E. Portanto, podemos dizer simplesmente que E e E' são isomorfos e denotamos este facto por $E \cong E'$.

Exemplo 8.14 *Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & a_2x^2 + a_1x + a_0 & \longmapsto & (a_2, a_1, a_0). \end{array}$$

Facilmente se prova que f é aplicação linear bijectiva. Então $\mathbb{R}_2[x] \cong \mathbb{R}^3$.

Teorema 8.15 *Qualquer espaço vectorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração Seja E um espaço vectorial real de dimensão n e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma sua base.

Porque cada vector u de E se escreve, de forma única, como combinação linear dos vectores de $\mathcal{B}$, então existem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

Portanto, podemos construir a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n & \longmapsto & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \end{array}$$

Para mostrarmos que $E \cong \mathbb{R}^n$, teremos de mostrar que

1. f é linear (exercício)

2. f é injectiva

3. f é sobrejectiva.

Vejamos então:

2. Sejam $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ e $u' = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ dois vectores de E tais que $f(u) = f(u')$.

Então, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, ou seja,

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$$

e $u = u'$. Portanto, f é injectiva.

3. Seja $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Porque E é um espaço vectorial real e $\mathcal{B}$ é uma base de E, o vector

$$u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

pertence a E. Por definição, $f(u) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Logo, f é sobrejectiva. $\square$

Este Teorema afirma que dado um espaço vectorial real de dimensão n, podemos pensar nele como se fosse o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ e tirar todas as conclusões.

Exemplo 8.16 *Seja*

$$\begin{array}{rcl} f: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[x] \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & (a+d)x^4 + (c-a)x^3 + bx. \end{array}$$

Porque

$$\begin{array}{rcl} M_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \cong & \mathbb{R}^4 \\ E_i & \longmapsto & e_i \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_4[x] & \cong & \mathbb{R}^5 \\ x^i & \longmapsto & e_{5-i} \end{array}$$

(Exemplo 8.8.1) *podemos pensar na aplicação*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & (a,b,c,d) & \longmapsto & (a+d, c-a, 0, b, 0). \end{array}$$

Porque g é linear, então f é linear.

$$\begin{aligned} Nuc\ g &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : g(a,b,c,d) = (0,0,0,0,0)\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a+d, c-a, 0, b, 0) = (0,0,0,0,0)\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = -d,\ c = a,\ b = 0\} \\ &= \{(a,0,a,-a) : a \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,1,-1) \rangle \end{aligned}$$

então,

$$Nuc\ f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Temos também, pela Proposição 5.18,

$$\begin{aligned} Im\ g &= \langle g(1,0,0,0), g(0,1,0,0), g(0,0,1,0), g(0,0,0,1) \rangle = \\ &= \langle (1,-1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0) \rangle \\ &= \langle (0,0,0,1,0), (0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0) \rangle \end{aligned}$$

pois $(1,-1,0,0,0) = 1.(1,0,0,0,0) - 1.(0,1,0,0,0)$, *então*

$$Im\ f = \langle x, x^3, x^4 \rangle .$$

Observação Como já vimos, o espaço vectorial **real** $(\mathbb{C}^2, +, .)$ tem dimensão 4. Então pelo Teorema anterior,

$$\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 .$$

8.4 Exercícios (Escolha Múltipla)

1. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se f é uma aplicação do espaço vectorial real E no espaço vectorial real V tal que $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então f é aplicação linear.

   B $f(a,b,c) = ax^2 + bx + c$ com $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, define uma aplicação linear injectiva de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}_2[x]$.

   C O espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tem dimensão nm.

   D $f(a,b,c) = (a-b)x^2 + (b-c)x + (a-c)$ com $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, define uma aplicação linear sobrejectiva de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Sendo $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ a aplicação linear tal que $f(1) = x + 1$, $f(2x) = -2x + 1$ e $f(3x^2) = 3x + 1$, então $f(3x^2 + 2x - 2)$ é:

   A $-x$.

   B x.

   C $3x + 1$.

   D $-3x + 1$.

3. Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

   $$f(ax^2 + bx + c) = (c - a, 0, 2b),$$

   para todo $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $2x^2 + 2 \in Nuc\ f$.

$\boxed{\text{B}}$ f é sobrejectiva.

$\boxed{\text{C}}$ f não é injectiva.

$\boxed{\text{D}}$ $(1, 0, 1) \in Im\ f$.

4. Sejam $\mathcal{B} = \{-x^2+x, -3x, 2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e, em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$. Considere $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $f(-3x) = (1, 2, 1)$.

$\boxed{\text{B}}$ f é injectiva.

$\boxed{\text{C}}$ f é sobrejectiva.

$\boxed{\text{D}}$ $(0, 1, 0) \in Im\ f$.

5. Sejam $\mathcal{B} = \{-x^2+x, -3x, 2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e, em $\mathbb{R}^3$ as bases $\mathcal{B}_1 = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$ e $b.c._{\mathbb{R}^3}$ (base canónica de $\mathbb{R}^3$). Considere $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a aplicação linear tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$.

$\boxed{\text{B}}$ $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{D}}$ $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$.

8.5 Exercícios

1. Considere $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações: Sendo (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\alpha \odot (v_1, v_2) = (\alpha v_1, 0).$$

a) Calcule $(-1, 2) \oplus (3, 0)$.

b) Calcule $2 \odot (3, -1)$.

c) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?

2. Considere $\mathbb{R}^2$ com as seguintes operações: Sendo (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(u_1, u_2) \oplus (v_1, v_2) = (u_1 + v_1 + 1, u_2 + v_2 + 1)$$

$$\alpha \odot (v_1, v_2) = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

a) Calcule $(-1, 1) \oplus (4, -5)$.

b) Calcule $7 \odot (2, -2)$.

c) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?

3. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (com as operações usuais):

a) As matrizes singulares de ordem n.

b) As matrizes diagonais de ordem n.

c) As matrizes simétricas de ordem n.

4. Seja E o conjunto das matrizes triangulares superiores, de ordem 2.

a) Mostre que E é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (com as operações usuais).

b) Determine uma base de E e a dimensão de E.

5. Sendo $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, mostre que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e escreva A como combinação linear dos vectores dessa base.

6. Sendo $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = 9x + 2$, $p_3(x) = 4x^2 + 3x + 3$ e $p(x) = -3x^2 + 17x + 2$, mostre que $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2[x]$ e escreva $p(x)$ como combinação linear dos vectores dessa base.

7. Considere $\mathbb{R}$ com as seguintes operações: Sendo u, v e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u \oplus v = u + v - 1$$

$$\alpha \odot v = \alpha v + (1 - \alpha).$$

a) Calcule $-1 \oplus 3$.

b) Calcule $0 \odot 3$.

c) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$?

8. Mostre que é impossível existir um espaço vectorial formado unicamente por dois vectores distintos.

9. Sejam E um espaço vectorial real e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto linearmente independente de E. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ números reais tais que

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n.$$

Mostre que $\alpha_i = \beta_i$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.

10. Seja V um espaço vectorial real e $u, v \in V$. Sendo $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $f(u) = (2, 1)$ e $f(v) = (-1, 4)$, determine $f(u + v)$.

11. Seja V um espaço vectorial real e $u, v \in V$. Sendo $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $f(u + v) = (6, 1)$ e $f(2u - v) = (-3, 0)$, determine $f(u)$ e $f(v)$.

12. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $f(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c-a & 0 \end{bmatrix}$. Determine

   a) o núcleo e a imagem de f.

   b) $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, em que $\mathcal{B}$ é a base de $\mathbb{R}_2[x]$ do exercício 6. e $\mathcal{B}'$ é a base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ do exercício 5..

13. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base $\{x^3, x^2, x+1, 4\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

   a) Verifique se f é injectiva e se é sobrejectiva.

   b) Determine $f(a,b)$ com $(a,b) \in \mathbb{R}$.

14. Sendo $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que $f(1) = x+1$, $f(2x) = -2x+1$ e $f(3x^2) = 3x+1$, determine $f(-x^2+4x+2)$.

15. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que

$$g(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b-c \\ 2b & a \end{bmatrix},$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que $Nuc\ g = \{(0,0,0)\}$.

   (b) Justifique que $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ pertence à imagem de g.

   (c) Sem determinar a imagem de g, justifique que g não é sobrejectiva.

   (d) Indique uma base da imagem de g.

16. Sejam E um espaço vectorial real, $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear, $F = Nuc\ f$ e

$$G = \{x \in E : f(x) = x\}.$$

Prove que:

   (a) G é um subespaço de E.

   (b) $F \cap G = \{0_E\}$.

   (c) Se $x \in F$ e $y \in G$ são tais que $x + y = 0_E$ então $x = 0_E$ e $y = 0_E$.

   (d) Se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e $\{y_1, \ldots, y_m\}$ são conjuntos linearmente independentes de F e G, respectivamente, então $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ é um conjunto linearmente independente de E.

17. Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(ax^2+bx+c) = (c-a, 0, 2b),$$

para todo $ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x]$.

   (a) Determine uma base de $Nuc(f)$

   (b) Determine uma base de $Im(f)$

   (c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores da base determinada em b).

(d) Determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$, sendo $\mathcal{B}=\{-x^2,x,2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1=\{(0,-1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$

18. Sejam $\mathcal{B}=\{-x^2+x,-3x,2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e, em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_1=\{(0,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$. Considere $f:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&2&0\\1&1&2\end{bmatrix}$$

(a) Determine uma base de $Nuc(f)$

(b) Determine uma base de $Im(f)$

(c) Determine, se possível $ax^2+bx+c\in\mathbb{R}_2[x]$ tal que $f(ax^2+bx+c)=(1,0,0)$.

(d) Determine $M(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$, sendo $\mathcal{B}_2=\{-x^2,x,2\}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $\mathcal{B}_3=\{(0,-1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$

19. Sejam W_1 e W_2 dois subespaços reais de um espaço vectorial real V. Mostre que $W_1\cap W_2$ é subespaço de V.

Capítulo 9

APÊNDICE

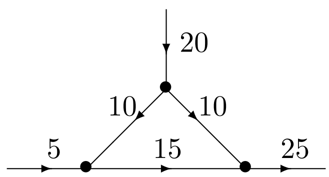
9.1 Outra Aplicação dos Sistemas: Análise de Redes

Rede é um conjunto de arcos ao longo dos quais "flui" alguma coisa. Por exemplo, arcos podem ser canos onde flui água, ruas de uma cidade onde flui o trânsito, fios eléctricos onde flui corrente eléctrica,... Estes arcos, na maioria das redes, encontram-se em pontos denominados vértices. Por exemplo, numa rede de canos de água, os vértices ocorrem quando se juntam três ou mais canos, na rede de trânsito, ocorrem quando há cruzamentos e na rede eléctrica quando se juntam três ou mais fios.

A maioria das redes tem três propriedades básicas:

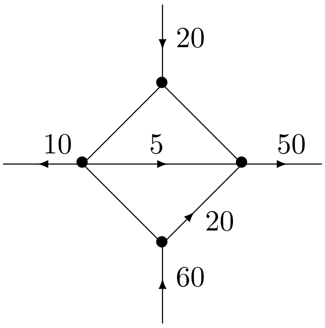
1. O fluxo num arco não pode mudar de sentido.
2. A taxa de fluxo que termina num vértice é igual à que sai do vértice.
3. A taxa de fluxo que sai da rede é igual à que entra na rede, sendo a taxa de fluxo de um arco uma medida numérica.

Exemplo 9.1 *Consideremos a seguinte rede de canos de água*

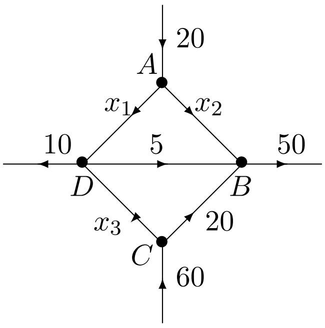


onde a medida dos arcos é em litros por minuto. Esta rede tem 3 *vértices. A taxa de fluxo que entra na rede é* $20 + 5 = 25$ *e a que sai da rede é* 25.

Exemplo 9.2 *A seguinte figura representa uma rede de trânsito com indicação de algumas taxas de fluxo nos arcos. Vamos encontrar as outras taxas de fluxo nos arcos e o sentido desse fluxo nos arcos.*



Vamos escolher sentidos arbitrários para os arcos que não o têm. Se não estiver bem escolhido o sentido, o seu valor virá negativo.



Como, nos vértices a taxa de fluxo que termina em cada um é igual à que começa, temos

$$
\begin{aligned}
20 &= x_1 + x_2 && (\textit{vértice } A)\\
x_1 + 20 &= 50 + 5 && (\textit{vértice } B)\\
x_3 + 60 &= 20 && (\textit{vértice } C)\\
5 + x_2 &= 30 + x_3 && (\textit{vértice } D)
\end{aligned}
$$

Estas condições produzem o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 20 \\ x_1 & = 35 \\ \quad\quad x_3 & = -40 \\ \quad x_2 - x_3 & = 25. \end{cases}$$

A solução do sistema é $x_1 = 35$, $x_2 = -15$, $x_3 = -40$, ou seja, os sentidos de x_2 e x_3 estão incorrectos.

9.2 Produto Interno de Vectores

Nesta secção vamos rever alguns conceitos relacionados com o produto interno.

Definição 9.3 *Sejam u um vector de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Designa-se $||u||$ o comprimento do vector u.*

Definição 9.4 *Sejam u e v dois vectores não nulos de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. Designa-se por ângulo formado pelos vectores u e v e denota-se por $(u \hat{,} v)$, ao menor ângulo formado pelos dois vectores.*

Observação O ângulo formado por dois vectores é sempre menor ou igual a π.

Definição 9.5 *O produto interno de dois vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$, u e v, do plano ou do espaço, representa-se por $u|v$ e é dado pelo número real*

$$u|v = ||u|| \ ||v|| \cos (u \hat{,} v).$$

Se u ou v é o vector nulo então $u|v = 0$.

Proposição 9.6 *Sejam u, v e w vectores do plano ou do espaço e $k \in \mathbb{R}$. Tem-se então:*

(a) $u|v = v|u$,

(b) $(u + v)|w = (u|w) + (v|w)$,

(c) $(ku)|v = k(u|v) = u|(kv)$,

(d) $u|u \geq 0$ *e* $u|u = 0$ *se e só se* u *é o vector nulo.*

Sejam $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ os vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. Pelas propriedades do produto interno, se $i, j \in \{1,2,3\}$ e $i \neq j$,

$$e_i|e_i = 1$$

e

$$e_i|e_j = 0.$$

Sejam $u = (a_1, a_2, a_3)$ e $v = (b_1, b_2, b_3)$ temos

$$\begin{aligned}
u|v &= (a_1, a_2, a_3)|(b_1, b_2, b_3) \\
&= (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)|(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) \\
&= (a_1e_1|b_1e_1) + (a_1e_1|b_2e_2) + (a_1e_1|b_3e_3) \\
&+ (a_2e_2|b_1e_1) + (a_2e_2|b_2e_2) + (a_2e_2|b_3e_3) \\
&+ (a_3e_3|b_1e_1) + (a_3e_3|b_2e_2) + (a_3e_3|b_3e_3) \\
&= a_1b_1(e_1|e_1) + a_1b_2(e_1|e_2) + a_1b_3(e_1|e_3) \\
&+ a_2b_1(e_2|e_1) + a_2b_2(e_2|e_2) + a_2b_3(e_2|e_3) \\
&+ a_3b_1(e_3|e_1) + a_3b_2(e_3|e_2) + a_3b_3(e_3|e_3) \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

O mesmo acontece se os vectores $u = (a_1, a_2)$ e $v = (b_1, b_2)$ pertencerem a $\mathbb{R}^2$. Pelo que temos,

$$u|v = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Daqui vem que

$$||u|| = \sqrt{u|u}.$$

Exemplo 9.7 *Sendo* $u = (3,4,2)$ *e* $v = (0,1,-2)$ *então*

$$u|v = 0 + 4 - 4 = 0$$

e

$$||v|| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

Bibliografia

[1] H. ANTON e R.C.BUSBY, *Álgebra Linear Contemporânea*, Bookman, 2006.

[2] H. ANTON e C. RORRES, *Elementary Linear Algebra-Applications version*, 8th Edition, John Wiley and Sons,Inc., 2000.

[3] H. ANTON e C. RORRES, *Álgebra Linear com Aplicações*, 8ª Edição, Bookman, 2001.

[4] T.S.BLYTH e E.F.ROBERTSON, *Basic Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1998.

[5] E. GIRALDES, V.H. FERNANDES e M.P. MARQUES SMITH, *Álgebra Linear e Geometria Analítica* , McGraw-Hill de Portugal, 1995.

[6] L.T. MAGALHÃES, *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, 9ª Edição, Texto Editora, 2004.

[7] A. MONTEIRO, *Álgebra Linear e Geometria Analítica* , McGraw-Hill de Portugal, 2001.