Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B,$$

então

$$\det A = 0 \ \textit{se, e só se,} \ \det B = 0.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\underline{\underline{A \textit{ é invertível} \quad \textit{se, e só se,} \quad \det A \neq 0.}}$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B,$$

então

$$\det A = 0 \ \textit{se, e só se,} \ \det B = 0.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\underline{\underline{A \text{ é invertível} \quad \textit{se, e só se,} \quad \det A \neq 0.}}$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B,$$

então

$$\det A = 0 \text{ se, e só se, } \det B = 0.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*. Tem-se*

$$\underline{\underline{A \text{ é invertível } \quad \text{se, e só se, } \det A \neq 0.}}$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B,$$

então

$$\det A = 0 \textit{ se, e só se, } \det B = 0.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\underline{\underline{A \textit{ é invertível } \quad \textit{se, e só se, } \det A \neq 0.}}$$

3.4 Determinante do produto de matrizes

Teorema

- *Sejam* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

- *Mais geralmente, se* $t \geq 2$ *e* $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *então*

$$\det(A_1 \cdots A_t) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível (então,* $\det A \neq 0$*). Tem-se*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3.4 Determinante do produto de matrizes

Teorema

- *Sejam* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

- *Mais geralmente, se* $t \geq 2$ *e* $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *então*

$$\det\left(A_1 \cdots A_t\right) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível (então,* $\det A \neq 0$*). Tem-se*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3.4 Determinante do produto de matrizes

Teorema

- *Sejam* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

- *Mais geralmente, se* $t \geq 2$ *e* $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *então*

$$\det\left(A_1 \cdots A_t\right) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível (então,* $\det A \neq 0$*). Tem-se*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, *com* $n \geq 2$.

1. *Chamamos* **matriz dos complementos algébricos** *de* A *à matriz dos seus complementos algébricos e denotamo-la por* $\widehat{A}$.

2. *Chamamos* **adjunta** *de* A *à matriz transposta da matriz* $\widehat{A}$ *e denotamo-la por* $adj\ A$, *isto é,*

$$(adj\ A) = \widehat{A}^T$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para determinar a matriz dos complementos algébricos:

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, com* $n \geq 2$.

1. *Chamamos* **matriz dos complementos algébricos** *de* A *à matriz dos seus complementos algébricos e denotamo-la por* $\widehat{A}$.
2. *Chamamos* **adjunta** *de* A *à matriz transposta da matriz* $\widehat{A}$ *e denotamo-la por* $adj\ A$*, isto é,*

$$(adj\ A) = \widehat{A}^T$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Para determinar a matriz dos complementos algébricos:

$$\widehat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+6) = -5$$

$$\widehat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \det A(2|3) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$$

$$\widehat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det A(3|1) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-0) = 3 \;....$$

Então,

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{23} \\ \widehat{A}_{31} & \widehat{A}_{32} & \widehat{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A adjunta de A é então dada por

$$adj\ A = (\widehat{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\widehat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1+6) = -5$$

$$\widehat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \det A(2|3) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$$

$$\widehat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \det A(3|1) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-0) = 3 \;....$$

Então,

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{23} \\ \widehat{A}_{31} & \widehat{A}_{32} & \widehat{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A adjunta de A é então dada por

$$adj\ A = (\widehat{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

(a)

$$A\,adjA = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n.$$

(b) *Se* A *é invertível então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA.$$

Observação

Para estabelecer (a) *temos de observar que:*

1. $\det A \overset{Lapl.}{\underset{\ell_i}{=}} A_{i1}\widehat{A}_{i1} + A_{i2}\widehat{A}_{i2} + \ldots + A_{in}\widehat{A}_{in}, \quad para\ i = 1, 2, \ldots, n;$
2. $A_{i1}\widehat{A}_{j1} + A_{i2}\widehat{A}_{j2} + \ldots + A_{in}\widehat{A}_{jn} = 0, \quad para\ i \neq j.$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

(a)

$$A\,adjA = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I_n.$$

(b) *Se* A *é invertível então*

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{\det A}adjA.}}$$

Observação

Para estabelecer (a) *temos de observar que:*

1. $\det A \overset{Lapl.}{\underset{\ell_i}{=}} A_{i1}\widehat{A}_{i1} + A_{i2}\widehat{A}_{i2} + ... + A_{in}\widehat{A}_{in}$, *para* $i = 1, 2, ..., n$;
2. $A_{i1}\widehat{A}_{j1} + A_{i2}\widehat{A}_{j2} + ... + A_{in}\widehat{A}_{jn} = 0$, *para* $i \neq j$.

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se

(a)

$$A\, adjA = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n.$$

(b) *Se A é invertível então*

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA.}}$$

Observação

Para estabelecer (a) temos de observar que:

1. $\det A \overset{Lapl.}{\underset{\ell_i}{=}} A_{i1}\widehat{A}_{i1} + A_{i2}\widehat{A}_{i2} + \ldots + A_{in}\widehat{A}_{in}, \quad para\ i = 1, 2, \ldots, n;$
2. $A_{i1}\widehat{A}_{j1} + A_{i2}\widehat{A}_{j2} + \ldots + A_{in}\widehat{A}_{jn} = 0, \quad para\ i \neq j.$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ temos $\det A = -5 \neq 0$, então A é invertível. Pelo Teorema,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ temos $\det A = -5 \neq 0$, então A é invertível. Pelo Teorema,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj\ A = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.6 Regra de Cramer

Recorde-se a definição de sistema de Cramer:

Definição

Sistema de Cramer é um sistema de equações lineares em que a matriz simples do sistema é quadrada e invertível ($\det A \neq 0$).

Teorema (Regra de Cramer)

Seja $AX = B$ *um sistema de* n *equações a* n *incógnitas, tal que,* A *é invertível. A única solução do sistema é*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad \dots \qquad , x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

em que A_j *é a matriz que resulta substituindo a* j*-ésima coluna de* A *por* B.

3.6 Regra de Cramer

Recorde-se a definição de sistema de Cramer:

Definição

Sistema de Cramer é um sistema de equações lineares em que a matriz simples do sistema é quadrada e invertível ($\det A \neq 0$).

Teorema (Regra de Cramer)

Seja $AX = B$ um sistema de n equações a n incógnitas, tal que, A é invertível. A única solução do sistema é

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \qquad \dots \qquad , x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

em que A_j é a matriz que resulta substituindo a j-ésima coluna de A por B.

Exemplo

Considere o sistema $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ .A matriz simples do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz dos termos independentes é

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Como $\det A = -3 \neq 0$, então A é invertível e estamos perante um sistema de Cramer.

Exemplo

Considere o sistema $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$ .A matriz simples do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e a matriz dos termos independentes é

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Como $\det A = -3 \neq 0$, então A é invertível e estamos perante um sistema de Cramer.

Pela Regra de Cramer,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = 0, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = 1.$$

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

3.2, 3.3, 3.4(a), 3.6, 3.14, 3.15, 3.19, 3.28, 3.29, 3.32