Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. **Espaços Vectoriais**
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

Espaços Vectoriais

4.1 Definições, exemplos e propriedades

Considere os conjuntos $\mathbb{K}$ e $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a operação de adição (representada por $+$) tem as seguintes propriedades:
   - A1. $+$ é associativa
   - A2. $+$ é comutativa
   - A3. existe elemento neutro para a operação $+$
   - A4. todo o elemento de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem oposto para a operação $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$
2. A multiplicação de um número por uma matriz verifica:
   - M1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),\qquad \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
   - M2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),\qquad (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
   - M3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),\qquad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
   - M4. $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),\qquad 1.A = A$ (sendo 1 o número real)

Definição

Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$. Suponhamos definidas duas operações:

- **adição** em E, que associa a cada par (u, v) de elementos de E um, e um só, elemento de E que é representado por $u + v$;
- **multiplicação externa**, que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada $u \in E$ associa um, e um só, elemento de E que é representado por $\alpha.u$ ou αu.

Diz-se que E é um **espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$** se:

1. A **adição** em E verifica
   - A1. a operação $+$ é associativa
   - A2. a operação $+$ é comutativa
   - A3. existe elemento neutro para a operação $+$
   - A4. todo o elemento de E tem oposto para a operação $+$

Definição

Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, ou o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$. Suponhamos definidas duas operações:

- **adição** em E, que associa a cada par (u, v) de elementos de E um, e um só, elemento de E que é representado por $u + v$;
- **multiplicação externa**, que a cada $\alpha \in \mathbb{K}$ e a cada $u \in E$ associa um, e um só, elemento de E que é representado por $\alpha.u$ ou αu.

Diz-se que E é um **espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$** se:

1. A **adição** em E verifica
   - A1. a operação $+$ é associativa
   - A2. a operação $+$ é comutativa
   - A3. existe elemento neutro para a operação $+$
   - A4. todo o elemento de E tem oposto para a operação $+$

2. A **multiplicação externa** verifica

M1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \qquad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

M2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \qquad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

M3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \qquad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M4. $\forall u \in E, \qquad 1.u = u$ (sendo 1 o número real)

Exemplos

- $\mathbb{R}$, *com as operações habituais de adição e multiplicação por um elemento, é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *com a adição usual de matrizes e o produto de um elemento por uma matriz, é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$;

2. A **multiplicação externa** verifica

M1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \qquad \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

M2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \qquad (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

M3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \qquad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

M4. $\forall u \in E, \qquad 1.u = u \qquad$ (sendo 1 o número real)

Exemplos

- $\mathbb{R}$, *com as operações habituais de adição e multiplicação por um elemento, é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *com a adição usual de matrizes e o produto de um elemento por uma matriz, é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$;

- Considere $n \in \mathbb{N}$ e

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) : \ a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}\}.$$

Defina-se em $\mathbb{K}^n$ a operação de adição e de multiplicação por um elemento de $\mathbb{K}$ dadas por:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$$

e

$$\alpha.(a_1, a_2, ..., a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, ..., \alpha a_n), \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

$\mathbb{K}^n$ com as operações que acabamos de definir é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

- Considere $n \in \mathbb{N}$ e

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : \; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}\},$$

o conjunto de todos os polinómios em x de grau menor ou igual a n.

$\mathbb{K}_n[x]$, com as operações usuais de soma de polinómios e produto de um elemento de $\mathbb{K}$ por um polinómio,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0) \\ &= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha.p(x) &= \alpha.(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) \\ &= (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (\alpha a_0) \end{aligned}$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

1. Aos elementos de E chamamos **vectores**.
2. Aos elementos de $\mathbb{K}$ chamamos **escalares**.
3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que E é um **espaço vectorial real**.
4. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dizemos que E é um **espaço vectorial complexo**.

Teorema

Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

1. $\alpha.0_E = 0_E$;
2. $0.u = 0_E$;
3. $(-\alpha).u = \alpha.(-u) = -(\alpha.u)$;
4. $\alpha.u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$.