

## Definição

Seja  $E$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{K}$ .

1. Aos elementos de  $E$  chamamos **vectores**.
2. Aos elementos de  $\mathbb{K}$  chamamos **escalares**.
3. Se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dizemos que  $E$  é um **espaço vectorial real**.

## Observação

Num espaço vectorial  $E$  é válida a lei do corte: Para  $u, v, w \in E$ ,

$$u + w = v + w \Rightarrow u = v.$$

## Teorema

Sejam  $E$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $u, v \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Então:

1.  $\alpha \cdot 0_E = 0_E$ ;
2.  $0 \cdot u = 0_E$ ;
3.  $\alpha \cdot u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0$  ou  $u = 0_E$ .

## 4.2 Subespaços vectoriais

### Definição (Critério de Subespaço Vectorial)

Seja  $E$  um espaço vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Um conjunto  $F$  diz-se um **subespaço (vectorial)** de  $E$  se:

- 1  $F \subseteq E$ ;
- 2  $0_E \in F$ ;
- 3  $\forall u, v \in F, u + v \in F$ ;
- 4  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \alpha u \in F$ .

### Observação

*Todo o subespaço  $F$  de um espaço vectorial  $E$ , é ele próprio um espaço vectorial.*

## Exemplo

### 1. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

### 2. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$

não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

### 3. O conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

não é subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

### 4. O conjunto

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exemplo

1. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

2. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$

não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

3. O conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

não é subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

4. O conjunto

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exemplo

1. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

2. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$

não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

3. O conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

não é subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

4. O conjunto

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exemplo

1. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

2. O conjunto

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$

não é subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Porquê?

3. O conjunto

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

não é subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

4. O conjunto

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$

é um subespaço vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

## Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial $E$ ?

- 1 Em  $E$  existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \text{ e } F_2 = E.$$

## Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial $E$ ?

- 1 Em  $E$  existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \text{ e } F_2 = E.$$

## Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial $E$ ?

- 1 Em  $E$  existem sempre dois subespaços:

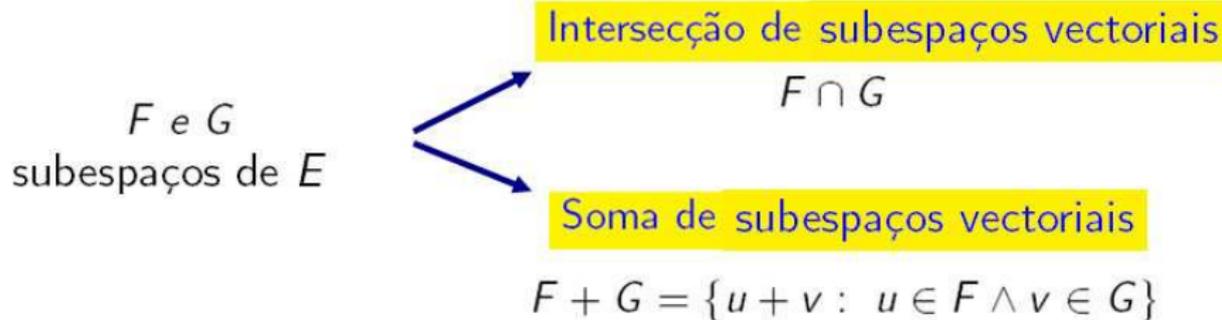
$$F_1 = \{0_E\} \text{ e } F_2 = E.$$

## Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial $E$ ?

- 1 Em  $E$  existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \text{ e } F_2 = E.$$

- 2 Se  $F$  e  $G$  são subespaços de  $E$  :



### Teorema

Se  $F$  e  $G$  são subespaços vectoriais de um espaço vectorial  $E$ , então:

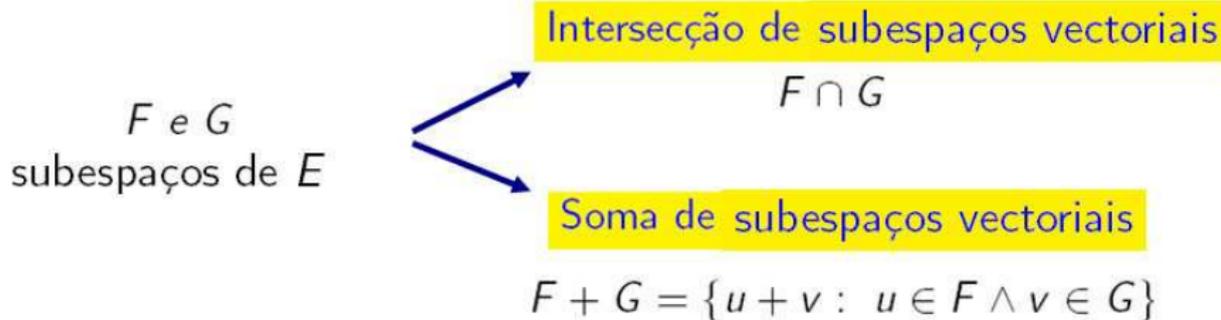
- (a) A intersecção  $F \cap G$  é um subespaço vectorial de  $E$ ;  
 (b) A soma  $F + G$  é um subespaço vectorial de  $E$ .

## Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial $E$ ?

- 1 Em  $E$  existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \text{ e } F_2 = E.$$

- 2 Se  $F$  e  $G$  são subespaços de  $E$  :



### Teorema

Se  $F$  e  $G$  são subespaços vectoriais de um espaço vectorial  $E$ , então:

- (a) A intersecção  $F \cap G$  é um subespaço vectorial de  $E$ ;  
 (b) A soma  $F + G$  é um subespaço vectorial de  $E$ .