Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

1. Aos elementos de E chamamos **vectores**.
2. Aos elementos de $\mathbb{K}$ chamamos **escalares**.
3. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dizemos que E é um **espaço vectorial real**.

Observação

Num espaço vectorial E é válida a lei do corte: Para $u, v, w \in E$,

$$u + w = v + w \quad \Rightarrow \quad u = v.$$

Teorema

Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então:

1. $\alpha.0_E = 0_E$;
2. $0.u = 0_E$;
3. $\alpha.u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0$ *ou* $u = 0_E$.

4.2 Suespaços vectoriais

Definição (Critério de Subespaço Vectorial)

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Um conjunto F diz-se um **subespaço (vectorial)** *de E se:*

1. $F \subseteq E$;
2. $0_E \in F$;
3. $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$;
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall u \in F, \quad \alpha u \in F$.

Observação

Todo o subespaço F de um espaço vectorial E, é ele próprio um espaço vectorial.

Exemplo

1. O conjunto
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

2. O conjunto
$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$
não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

3. O conjunto
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. O conjunto
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

1. O conjunto
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

2. O conjunto
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$
não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

3. O conjunto
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. O conjunto
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

1. O conjunto
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

2. O conjunto
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$
não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

3. O conjunto
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. O conjunto
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

1. O conjunto
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

2. O conjunto
$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 5\},$$
não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

3. O conjunto
$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$
não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4. O conjunto
$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$
é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \ \ e \ \ F_2 = E.$$

Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \quad e \quad F_2 = E.$$

Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:
$$F_1 = \{0_E\} \quad e \quad F_2 = E.$$

Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \quad e \quad F_2 = E.$$

2. Se F e G são subespaços de E :

F e G
subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \; u \in F \wedge v \in G\}$$

Teorema

Se F e G são subespaços vectoriais de um espaço vectorial E, então:

(a) *A intersecção $F \cap G$ é um subespaço vectorial de E;*

(b) *A soma $F + G$ é um subespaço vectorial de E.*

Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:

$$F_1 = \{0_E\} \quad e \quad F_2 = E.$$

2. Se F e G são subespaços de E :

F e G subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \ u \in F \wedge v \in G\}$$

Teorema

Se F e G são subespaços vectoriais de um espaço vectorial E, então:

(a) *A intersecção $F \cap G$ é um subespaço vectorial de E;*

(b) *A soma $F + G$ é um subespaço vectorial de E.*