Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:

$$F = \{0_E\} \;\; e \;\; G = E.$$

2. Se F e G são subespaços de E :

F e G
subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \; u \in F \wedge v \in G\}$$

Teorema

Se F e G são subespaços vectoriais de um espaço vectorial E, então:

(a) *A intersecção $F \cap G$ é um subespaço vectorial de E;*

(b) *A soma $F + G$ é um subespaço vectorial de E.*

Como obter subespaços vectoriais de um espaço vectorial E ?

1. Em E existem sempre dois subespaços:

$$F = \{0_E\} \;\; e \;\; G = E.$$

2. Se F e G são subespaços de E :

F e G
subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \; u \in F \wedge v \in G\}$$

Teorema

Se F e G são subespaços vectoriais de um espaço vectorial E, então:

(a) *A intersecção $F \cap G$ é um subespaço vectorial de E;*

(b) *A soma $F + G$ é um subespaço vectorial de E.*

O que se passa com a união de subespaços ?

Exemplo

Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Os conjuntos

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \quad e \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$. No entanto, a união

$$F \cup G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$$

não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

A união de subespaços vectoriais
não é em geral um subespaço vectorial

O que se passa com a união de subespaços ?

Exemplo

Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Os conjuntos

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \quad e \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$. No entanto, a união

$$F \cup G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$$

não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

A união de subespaços vectoriais
não é em geral um subespaço vectorial

O que se passa com a união de subespaços ?

Exemplo

Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Os conjuntos

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \quad e \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$. No entanto, a união

$$F \cup G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$$

não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Porquê?

A união de subespaços vectoriais
não é em geral um subespaço vectorial

O próximo resultado diz-nos quando é que a união de dois subespaços de um espaço vectorial ainda é um subespaço vectorial.

Teorema

Sejam F e G dois subespaços vectoriais de um espaço vectorial E. Tem-se que

$$F \cup G \text{ é subespaço de } E \quad \text{sse} \quad F \subseteq G \text{ ou } G \subseteq F.$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diz-se que um vector $v \in E$ é **combinação linear** dos vectores $u_1, u_2, ..., u_n \in E$, se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n v_n.$$

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ dizem-se os **coeficientes** da combinação linear.

Exemplo

1. No espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, tem-se

$$(3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1).$$

Então $(3, 2)$ é combinação linear dos vectores $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

2. No espaço vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^4$ os vectores

$$u_1 = (1,0,0,0),\ \ u_2 = (1,0,3,0)\ \ e\ \ u_3 = (0,0,1,0).$$

Qual o conjunto de todas as combinações lineares de u_1, u_2, u_3.?

2. No espaço vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ é combinação linear de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^4$ os vectores

$$u_1 = (1,0,0,0),\ \ u_2 = (1,0,3,0) \ e \ u_3 = (0,0,1,0).$$

Qual o conjunto de todas as combinações lineares de u_1, u_2, u_3.?

Definição

Se E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$, representa-se por

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$$

o conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
Assim,

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Observação

1. *É fácil provar que $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ é subespaço de E.*
2. *Ao subespaço $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ chama-se* **subespaço gerado pelos vectories** $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
3. *Os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dizem-se os* **geradores** *do subespaço $\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$.*

Definição

Se E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, u_2, ..., u_n \in E$, representa-se por

$$\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$$

o conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, u_2, ..., u_n$.
Assim,

$$\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n : \ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}.$$

Observação

1. *É fácil provar que $\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$ é subespaço de E.*
2. *Ao subespaço $\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$ chama-se* **subespaço gerado pelos vectories** $u_1, u_2, ..., u_n$.
3. *Os vectores $u_1, u_2, ..., u_n$ dizem-se os* **geradores** *do subespaço $\langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle$.*

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\}.$$

1. *Mostre que* F *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Indique uma sequência de geradores de* F.
3. *Averigue se os vectores* $(-2, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *e* $(-2, 1, 3)$ *ainda são geradores de* F, *ou seja, se*

$$F = \langle (-2, 1, 0), (0, 0, 1), (-2, 1, 3) \rangle.$$

Observação

Podem existir vectores diferentes que geram o mesmo subespaço.

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\}.$$

1. *Mostre que* F *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Indique uma sequência de geradores de* F.
3. *Averigue se os vectores* $(-2, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *e* $(-2, 1, 3)$ *ainda são geradores de* F, *ou seja, se*

$$F = \langle(-2, 1, 0), (0, 0, 1), (-2, 1, 3)\rangle.$$

Observação

Podem existir vectores diferentes que geram o mesmo subespaço.

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^3$,

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0\}.$$

1. *Mostre que* F *é um subespaço de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Indique uma sequência de geradores de* F.
3. *Averigue se os vectores* $(-2, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *e* $(-2, 1, 3)$ *ainda são geradores de* F, *ou seja, se*

$$F = \langle(-2, 1, 0), (0, 0, 1), (-2, 1, 3)\rangle.$$

Observação

Podem existir vectores diferentes que geram o mesmo subespaço.