Questão:(Revisão aula anterior)

Considere em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos

$$A = \{(1,0),(1,1)\} \quad e \quad G = \langle (1,0),(1,1) \rangle.$$

1. Os conjuntos A e G são iguais?
2. Considere agora os conjuntos

$$B = \{(1,0),(1,1),(3,2)\} \quad e \quad F = \langle (1,0),(1,1),(3,2) \rangle.$$

É claro que $A \neq B$.Será que $G \neq F$?

Questão:(Revisão aula anterior)

Considere em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos

$$A = \{(1,0),(1,1)\} \quad e \quad G = \langle (1,0),(1,1) \rangle .$$

1. Os conjuntos A e G são iguais?
2. Considere agora os conjuntos

$$B = \{(1,0),(1,1),(3,2)\} \quad e \quad F = \langle (1,0),(1,1),(3,2) \rangle .$$

É claro que $A \neq B$. Será que $G \neq F$?

Questão:(Revisão aula anterior)

Considere em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos

$$A = \{(1,0),(1,1)\} \quad e \quad G = \langle (1,0),(1,1) \rangle.$$

1. Os conjuntos A e G são iguais?
2. Considere agora os conjuntos

   $$B = \{(1,0),(1,1),(3,2)\} \quad e \quad F = \langle (1,0),(1,1),(3,2) \rangle.$$

   É claro que $A \neq B$.Será que $G \neq F$?

Proposição

Se $u_1, u_2, \ldots, u_r$ *são vectores de um espaço vectorial* E *e um dos vectores* u_i *é combinação linear dos restantes* $r-1$ *vectores, então*

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle.$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$\begin{aligned}\langle (1,2,0),(0,0,1),(2,4,-1),(3,6,4) \rangle &= \langle (1,2,0),(0,0,1),(2,4,-1) \rangle \\ &\langle (1,2,0),(0,0,1) \rangle\end{aligned}$$

Proposição

Se $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e um dos vectores u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores, então

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle.$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$\begin{aligned}\langle (1,2,0),(0,0,1),(2,4,-1),(3,6,4) \rangle &= \langle (1,2,0),(0,0,1),(2,4,-1) \rangle \\ &\langle (1,2,0),(0,0,1) \rangle\end{aligned}$$

Proposição

Se $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e um dos vectores u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores, então

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle.$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$\begin{aligned}\langle (1,2,0), (0,0,1), (2,4,-1), (3,6,4) \rangle &= \langle (1,2,0), (0,0,1), (2,4,-1) \rangle \\ & \langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle\end{aligned}$$

Proposição

Se $u_1, u_2, ..., u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e um dos vectores u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores, então

$$\langle u_1, u_2, ..., u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1} ..., u_r \rangle = \langle u_1, u_2, ..., u_{i-1}, u_{i+1} ..., u_r \rangle.$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$\langle (1,2,0), (0,0,1), (2,4,-1), (3,6,4) \rangle = \langle (1,2,0), (0,0,1), (2,4,-1) \rangle$$

$$\langle (1,2,0), (0,0,1) \rangle$$

Proposição

Se $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e um dos vectores u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores, então

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, \mathbf{u_i}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle = \langle u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1} \ldots, u_r \rangle.$$

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle (1,2,0),(0,0,1),(2,4,-1),(3,6,4) \rangle &= \langle (1,2,0),(0,0,1),(2,4,-1) \rangle \\ &\langle (1,2,0),(0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Exercício

Qual é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que é gerado pelos vectores

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)?$$

Observação

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^n = \langle (1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),....,(0,0,0,...,1) \rangle.$$

Exercício

Qual é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que é gerado pelos vectores

$$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)?$$

Observação

Para $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^n = \langle (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ..., (0,0,0,...,1) \rangle.$$

Proposição

Seja $S = (u_1, u_2, ..., u_r)$ *uma sequência de vectores de um e.v.* E *e* $S' = (u'_1, u'_2, ..., u'_r)$ *uma sequência que se obtenha de* S *efectuando um número finito de transformações dos seguintes tipos:*

1. *Troca de posições, na sequência, de dois vectores distintos;*
2. *Multiplicação de um vector por um escalar* ***não nulo****;*
3. *Substituir um vector* u_i *pelo vector* $u_i + \beta u_j$*, com* $j \neq i$ *e* $\beta \in \mathbb{K}$*.*

Então

$$\langle u_1, u_2, ..., u_r \rangle = \langle u'_1, u'_2, ..., u'_r \rangle.$$

Exemplo

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle = \langle (0,1), (1,0) \rangle = \langle (0,3), (2,0) \rangle = \langle (2,3), (2,0) \rangle.$$

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^3$ *os vectores*

$$(2,2,0),\ (0,1,0)\ e\ (-1,-1,1).$$

Dado que

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle (2,2,0),(0,1,0),(-1,-1,1)\rangle &= \langle (1,1,0),(0,1,0),(-1,-1,1)\rangle \\ &= \langle (1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

4.2 Dependência e independência linear

Em $\mathbb{R}$ tem-se que:

- $(0,2) = 2(0,1)$.

  Diz então que os vectores $(0,2)$ e $(0,1)$ são linearmente dependentes;

- $(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$.

  Diz que os vectores $(3,4), (1,0)$ e $(0,2)$ são linearmente dependentes.

Definição

Sejam E um e.v. e $u_1, u_2, ..., u_r \in E$ com $r > 2$. Diz-se que:

- os vectores $u_1, u_2, ..., u_r$ são **linearmente dependentes** (**l.d.**), se pelo menos um dos vectores for combinação linear dos restantes.

- Caso contrário, $u_1, u_2, ..., u_r$ dizem-se **linearmente independentes** (**l.i.**).

4.2 Dependência e independência linear

Em $\mathbb{R}$ tem-se que:

- $(0,2) = 2(0,1)$.

  Diz então que os vectores $(0,2)$ e $(0,1)$ são <u>linearmente dependentes</u>;

- $(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$.

  Diz que os vectores $(3,4),(1,0)$ e $(0,2)$ são <u>linearmente dependentes</u>.

Definição

Sejam E um e.v. e $u_1, u_2, ..., u_r \in E$ com $r > 2$. Diz-se que:

- os vectores $u_1, u_2, ..., u_r$ são **linearmente dependentes** (**l.d.**), se pelo menos um dos vectores for combinação linear dos restantes.

- Caso contrário, $u_1, u_2, ..., u_r$ dizem-se **linearmente independentes** (**l.i.**).

4.2 Dependência e independência linear

Em $\mathbb{R}$ tem-se que:

- $(0,2) = 2(0,1)$.

  Diz então que os vectores $(0,2)$ e $(0,1)$ são linearmente dependentes;

- $(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$.

  Diz que os vectores $(3,4), (1,0)$ e $(0,2)$ são linearmente dependentes.

Definição

Sejam E um e.v. e $u_1, u_2, \ldots, u_r \in E$ com $r > 2$. Diz-se que:

- os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são **linearmente dependentes** (**l.d.**), se pelo menos um dos vectores for combinação linear dos restantes.

- Caso contrário, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ dizem-se **linearmente independentes** (**l.i.**).

4.2 Dependência e independência linear

Em $\mathbb{R}$ tem-se que:

- $(0,2) = 2(0,1)$.

  Diz então que os vectores $(0,2)$ e $(0,1)$ são <u>linearmente dependentes</u>;

- $(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$.

  Diz que os vectores $(3,4),(1,0)$ e $(0,2)$ são <u>linearmente dependentes</u>.

Definição

Sejam E um e.v. e $u_1, u_2, ..., u_r \in E$ com $r > 2$. Diz-se que:

- os vectores $u_1, u_2, ..., u_r$ são **linearmente dependentes** (**l.d.**), se pelo menos um dos vectores for combinação linear dos restantes.
- Caso contrário, $u_1, u_2, ..., u_r$ dizem-se **linearmente independentes** (**l.i.**).

4.2 Dependência e independência linear

Em $\mathbb{R}$ tem-se que:

- $(0,2) = 2(0,1)$.

  Diz então que os vectores $(0,2)$ e $(0,1)$ são linearmente dependentes;

- $(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$.

  Diz que os vectores $(3,4),(1,0)$ e $(0,2)$ são linearmente dependentes.

Definição

Sejam E um e.v. e $u_1, u_2, \ldots, u_r \in E$ com $r > 2$. Diz-se que:

- os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_r$ são **linearmente dependentes** (**l.d.**), se pelo menos um dos vectores for combinação linear dos restantes.

- Caso contrário, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ dizem-se **linearmente independentes** (**l.i.**).

Observação

1. *O vector nulo, 0_E, diz-se sempre linearmente dependente.*
2. *Um vector $v \neq 0_E$, sozinho, diz-se sempre linearmente independente.*

Exemplo

- A sequência $((1,0),(0,1))$ é l.i. (em $\mathbb{R}^2$);
- A sequência $((3,4,1),(1,0,1),(0,2,-1))$ é l.d. (em $\mathbb{R}^3$);
- A sequência $((1,0),(0,0))$ é l.d.;
- A sequência $((0,0))$ é l.d;
- A sequência $((1,9))$ é l.i.

Observação

1. *O vector nulo, 0_E, diz-se sempre linearmente dependente.*
2. *Um vector $v \neq 0_E$, sozinho, diz-se sempre linearmente independente.*

Exemplo

- A sequência $((1,0),(0,1))$ é l.i. (em $\mathbb{R}^2$);
- A sequência $((3,4,1),(1,0,1),(0,2,-1))$ é l.d. (em $\mathbb{R}^3$);
- A sequência $((1,0),(0,0))$ é l.d.;
- A sequência $((0,0))$ é l.d;
- A sequência $((1,9))$ é l.i.

Observação

1. *O vector nulo, 0_E, diz-se sempre linearmente dependente.*
2. *Um vector $v \neq 0_E$, sozinho, diz-se sempre linearmente independente.*

Exemplo

- A sequência $((1,0),(0,1))$ é l.i. (em $\mathbb{R}^2$);
- A sequência $((3,4,1),(1,0,1),(0,2,-1))$ é l.d. (em $\mathbb{R}^3$);
- A sequência $((1,0),(0,0))$ é l.d.;
- A sequência $((0,0))$ é l.d;
- A sequência $((1,9))$ é l.i.

Observação

1. *O vector nulo,* 0_E, *diz-se sempre* *linearmente dependente.*
2. *Um vector* $v \neq 0_E$, *sozinho, diz-se sempre* *linearmente independente.*

Exemplo

- A sequência $((1,0),(0,1))$ é l.i. (em $\mathbb{R}^2$);
- A sequência $((3,4,1),(1,0,1),(0,2,-1))$ é l.d. (em $\mathbb{R}^3$);
- A sequência $((1,0),(0,0))$ é l.d.;
- A sequência $((0,0))$ é l.d;
- A sequência $((1,9))$ é l.i.

Observação

1. *O vector nulo, 0_E, diz-se sempre linearmente dependente.*
2. *Um vector $v \neq 0_E$, sozinho, diz-se sempre linearmente independente.*

Exemplo

- A sequência $((1,0),(0,1))$ é l.i. (em $\mathbb{R}^2$);
- A sequência $((3,4,1),(1,0,1),(0,2,-1))$ é l.d. (em $\mathbb{R}^3$);
- A sequência $((1,0),(0,0))$ é l.d.;
- A sequência $((0,0))$ é l.d;
- A sequência $((1,9))$ é l.i.

Observação

1. *O vector nulo, 0_E, diz-se sempre linearmente dependente.*
2. *Um vector $v \neq 0_E$, sozinho, diz-se sempre linearmente independente.*

Exemplo

- A sequência $((1,0),(0,1))$ é l.i. (em $\mathbb{R}^2$);
- A sequência $((3,4,1),(1,0,1),(0,2,-1))$ é l.d. (em $\mathbb{R}^3$);
- A sequência $((1,0),(0,0))$ é l.d.;
- A sequência $((0,0))$ é l.d;
- A sequência $((1,9))$ é l.i.

Critério de independência linear

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^3$ a sequência de vectores

$$((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,1)).$$

É l.d. ou l.i.?

Teorema

Sejam $u_1, u_2, ..., u_r$ vectores de um e.v. E.

$u_1, u_2, ..., u_r$ são linearmente independentes **sse**

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0.$$

Exercício

Considere em $\mathbb{R}^3$ *a sequência de vectores*

$$((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,1)).$$

É l.d. ou l.i.?

De acordo com o critério de independência linear, para estudar a relação entre os vectores dados devemos considerar uma combinação linear nula

$$\alpha(1,1,1)+\beta(1,-1,0)+\gamma(1,0,1)=(0,0,0)$$

e resolver os sistema resultante, ou seja,

$$\left\{\begin{array}{cccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & 0 \\ \alpha & -\beta & & = & 0 \\ \alpha & & +\gamma & = & 0. \end{array}\right.$$

Se o sistema for possível e determinado (caso em que a única solução será $(0,0,0)$), então os vectores são l.i. Se o sistema for possível e indeterminado, então os vectores são l.d..

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

4.6, 4.7, 4.13, 4.15, 4.17, 4.23, 4.29, 4.30, 4.32, 4.33, 4.106, 4.107, 4.113, 4.114, 4,117.