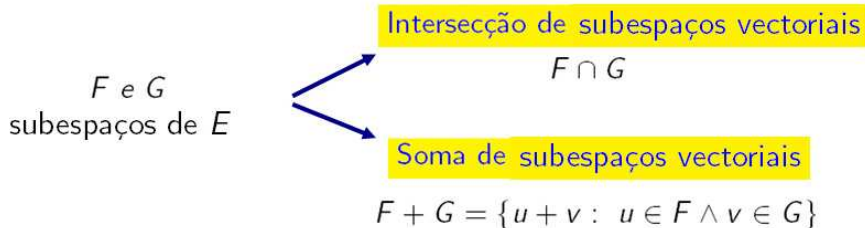


4.5 O Teorema das Dimensões

Recordar:



Proposição

Seja E um espaço vectorial F e G subespaços de E tais que

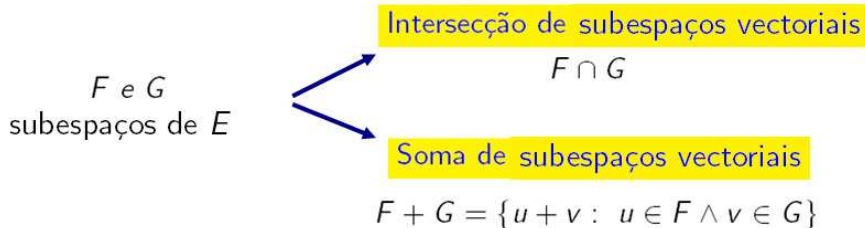
$$F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$$

então

$$F + G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle.$$

4.5 O Teorema das Dimensões

Recordar:



Proposição

Seja E um espaço vectorial F e G subespaços de E tais que

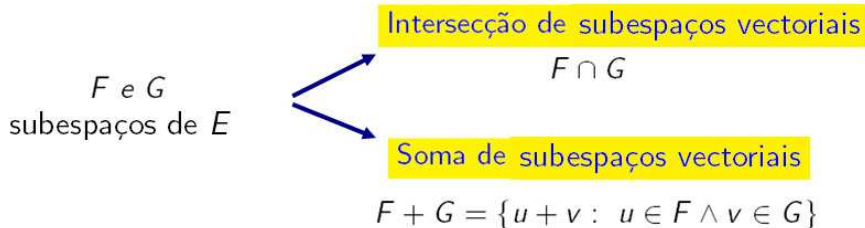
$$F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$$

então

$$F + G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle.$$

4.5 O Teorema das Dimensões

Recordar:



Proposição

Seja E um espaço vectorial F e G subespaços de E tais que

$$F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$$

então

$$F + G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle.$$

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^3$ os subespaços

$$F = \langle (1, 2, 1), (1, 2, 3) \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle (2, 4, 4), (0, 0, 1) \rangle.$$

Então

$$F + G = \langle (1, 2, 1), (1, 2, 3), (0, 0, 1), (2, 4, 4) \rangle.$$

No entanto, dado que

$$(2, 4, 4) = 2(1, 2, 1) + 2(0, 0, 1)$$

$$(1, 2, 3) = 1(1, 2, 1) + 2(0, 0, 1)$$

então

$$F + G = \langle (1, 2, 1), (0, 0, 1) \rangle.$$

Dado que a sequência $((1, 2, 1), (0, 0, 1))$ é l.i. então

$$\dim F + G = 2.$$

Teorema (Teorema das Dimensões)

Se E é um espaço vectorial e F e G são subespaços de E então

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Exercício

Em $\mathbb{R}^3$ considere os subespaços

$$F = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + 2c = 0\}$$

- 1 Indique $\dim F$ e $\dim G$.
- 2 Determine uma sequência geradora de $F + G$.
- 3 Determine uma base de $F + G$.
- 4 Indique $\dim F \cap G$.
- 5 Determine uma base de $F \cap G$.

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

4.37, 4.39, 4.40, 4.43, 4.45, 4.46, 4.47, 4.50, 4.52, 4.70, 4.124, 4.133,
4.134

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática

Programa

- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de Equações Lineares
- 3 Determinantes
- 4 Espaços Vectoriais
- 5 **Aplicações Lineares**
- 6 Valores e Vectores Próprios
- 7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
- 8 Geometria Analítica

Aplicações Lineares

5.1 Aplicações lineares: Definição, exemplos e propriedades

Definição

Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma aplicação

$$f : E \longrightarrow E'$$

diz-se uma **aplicação linear** se satisfaz as duas condições seguintes:

- 1 $\forall u, v \in E \quad f(u + v) = f(u) + f(v).$
- 2 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\alpha u) = \alpha f(u).$

Observação

De agora em diante, sempre que nos referirmos a E , E' e E'' como espaços vectoriais, estamos a pensar que todos são considerados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ (todos sobre $\mathbb{R}$ ou todos sobre $\mathbb{C}$).

Exemplos

- ❶ A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❷ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❸ A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplos

- ❶ A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❷ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❸ A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplos

- ❶ A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❷ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❸ A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplo

Seja E um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.

- ❶ A aplicação $g : E \rightarrow E$ definida por

$$g(u) = 0_E, \quad \forall u \in E,$$

é uma aplicação linear. Chama-se a esta aplicação a **aplicação nula**.

- ❷ A aplicação $f : E \rightarrow E$ definida por

$$f(u) = u, \quad \forall u \in E,$$

é uma aplicação linear que se designa por **aplicação identidade de E** e que se representa por **id_E** .