4.5 O Teorema das Dimensões

Recordar:

F e G
subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \; u \in F \wedge v \in G\}$$

Proposição

Seja E um espaço vectorial F e G subespaços de E tais que

$$F = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \qquad e \qquad G = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$

então

$$F + G = \langle u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

4.5 O Teorema das Dimensões

Recordar:

F e G
subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \; u \in F \wedge v \in G\}$$

Proposição

Seja E um espaço vectorial F e G subespaços de E tais que

$$F = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \qquad e \qquad G = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$

então

$$F + G = \langle u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

4.5 O Teorema das Dimensões

Recordar:

F e G
subespaços de E

Intersecção de subespaços vectoriais

$$F \cap G$$

Soma de subespaços vectoriais

$$F + G = \{u + v : \ u \in F \wedge v \in G\}$$

Proposição

Seja E um espaço vectorial F e G subespaços de E tais que

$$F = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \qquad e \qquad G = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$$

então

$$F + G = \langle u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^3$ os subespaços

$$F = \langle (1,2,1),(1,2,3) \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle (2,4,4),(0,0,1) \rangle.$$

Então

$$F + G = \langle (1,2,1),(1,2,3),(0,0,1),(2,4,4) \rangle.$$

No entanto, dado que

$$(2,4,4) = 2(1,2,1) + 2(0,0,1)$$

$$(1,2,3) = 1(1,2,1) + 2(0,0,1)$$

então

$$F + G = \langle (1,2,1),(0,0,1) \rangle.$$

Dado que a sequência $((1,2,1),(0,0,1))$ é l.i. então

$$\dim F + G = 2.$$

Teorema (Teorema das Dimensões)

Se E é um espaço vectorial e F e G são subespaços de E então

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Exercício

Em $\mathbb{R}^3$ *considere os subespaços*

$$F = \langle (1,0,1), (-1,1,0) \rangle \quad e \quad G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + 2c = 0\}$$

1. *Indique* $\dim F$ *e* $\dim G$.
2. *Determine uma sequência geradora de* $F + G$.
3. *Determine uma base de* $F + G$.
4. *Indique* $\dim F \cap G$.
5. *Determine uma base de* $F \cap G$.

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

4.37, 4.39, 4.40, 4.43, 4.45, 4.46, 4.47, 4.50, 4.52, 4.70, 4.124, 4.133, 4.134

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Programa

Aplicações Lineares

5.1 Aplicações lineares: Definição, exemplos e propriedades

Definição

Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma aplicação

$$f : E \longrightarrow E'$$

diz-se uma **aplicação linear** se satisfaz as duas condições seguintes:

1. $\forall u, v \in E \; f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \; f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Observação

De agora em diante, sempre que nos referirmos a E, E' e E'' como espaços vectoriais, estamos a pensar que todos são considerados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ (todos sobre $\mathbb{R}$ ou todos sobre $\mathbb{C}$).

Exemplos

1. *A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

2. *A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$f(x, y, x) = (x - y, 3z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

3. *A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por*

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplos

1. *A aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   é uma aplicação linear. Porquê?

2. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(x, y, x) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

   é uma aplicação linear. Porquê?

3. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *definida por*

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

   é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplos

1. *A aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

2. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(x, y, x) = (x - y, 3z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

3. *A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_3[x]$ *definida por*

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplo

Seja E um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.

1. A aplicação $g : E \longrightarrow E$ definida por

$$g(u) = 0_E, \quad \forall u \in E,$$

é uma aplicação linear. Chama-se a esta aplicação a **aplicação nula**.

2. A aplicação $f : E \longrightarrow E$ definida por

$$f(u) = u, \quad \forall u \in E,$$

é uma aplicação linear que se designa por **aplicação identidade de** E e que se representa por id_E.