

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática

Programa

- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de Equações Lineares
- 3 Determinantes
- 4 Espaços Vectoriais
- 5 **Aplicações Lineares**
- 6 Valores e Vectores Próprios
- 7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
- 8 Geometria Analítica

Aplicações Lineares

5.1 Aplicações lineares: Definição, exemplos e propriedades

Definição

Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma aplicação

$$f : E \longrightarrow E'$$

diz-se uma **aplicação linear** se satisfaz as duas condições seguintes:

- 1 $\forall u, v \in E \quad f(u + v) = f(u) + f(v).$
- 2 $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad f(\alpha u) = \alpha f(u).$

Observação

De agora em diante, sempre que nos referirmos a E , E' e E'' como espaços vectoriais, estamos a pensar que todos são considerados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ (todos sobre $\mathbb{R}$ ou todos sobre $\mathbb{C}$).

Exemplos

- ❶ A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❷ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❸ A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplos

- ❶ A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❷ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❸ A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

Exemplos

- ❶ A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❷ A aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (x - y, 3z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

- ❸ A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma aplicação linear. Porquê?

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u) = f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x$$

$$= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b)$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u) = f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x$$

$$= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b)$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u) = f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x$$

$$= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b)$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u) = f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x$$

$$= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b)$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha u) = f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x$$

$$= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \quad \checkmark$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) \end{aligned}$$

$$f(a, b) = 3ax^3 + bx$$

Vejamos o exemplo 3. A aplicação f é linear pois:

1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Ora, $u = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = 3(a_1 + a_2)x^3 + (b_1 + b_2)x \\ &= (a_1x^3 + b_1x) + (a_2x^3 + b_2x) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) \\ &= f(u) + f(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2) $f(\alpha u) = \alpha f(u)$, para qualquer $u \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?

Ora, $u = (a, b)$. Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(a, b)) = f(\alpha a, \alpha b) = 3(\alpha a)x^3 + (\alpha b)x \\ &= \alpha(3ax^3 + bx) = \alpha f(a, b) = \alpha f(u) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Exemplo

Seja E um espaço linear sobre $\mathbb{K}$.

- ❶ A aplicação $g : E \rightarrow E$ definida por

$$g(u) = 0_E, \quad \forall u \in E,$$

é uma aplicação linear. Chama-se a esta aplicação a **aplicação nula**.

- ❷ A aplicação $f : E \rightarrow E$ definida por

$$f(u) = u, \quad \forall u \in E,$$

é uma aplicação linear que se designa por **aplicação identidade de E** e que se representa por **id_E** .

5.3 Imagem e núcleo

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

- ① $f(0_E) = 0_{E'}$.
- ② $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$.

Exemplo

A aplicação

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (y, x, 2)$$

é aplicação linear? Não, porque $f(0, 0) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$.

5.3 Imagem e núcleo

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

- ① $f(0_E) = 0_{E'}$.
- ② $\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u)$.

Exemplo

A aplicação

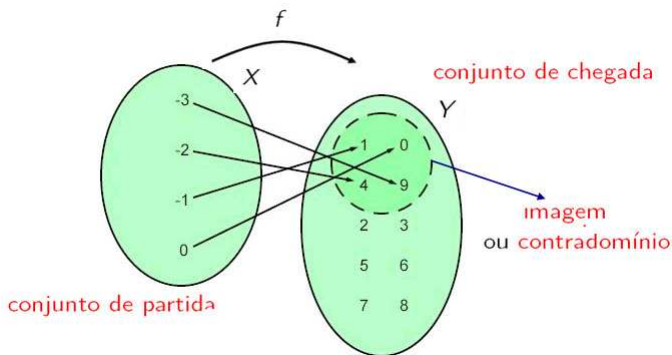
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (y, x, 2)$$

é aplicação linear? Não, porque $f(0, 0) = (0, 0, 2) \neq (0, 0, 0)$.

Revisão:

Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \rightarrow Y$ uma função (aplicação).



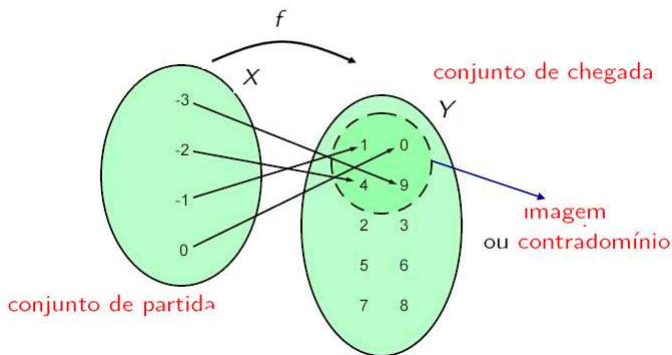
Definição

Chama-se **contradomínio** ou **imagem** de f ao conjunto

$$\text{Im}f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Revisão:

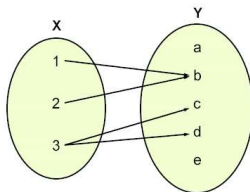
Sejam X e Y dois conjuntos e $f : X \rightarrow Y$ uma função (aplicação).

**Definição**

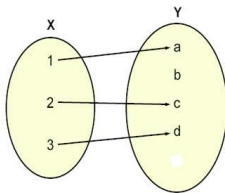
Chama-se **contradomínio** ou **imagem** de f ao conjunto

$$Imf = \{f(x) : x \in X\}.$$

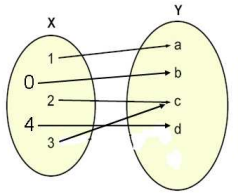
Tipos de funções:



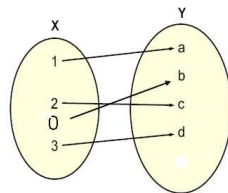
Não é função



Função Injectiva

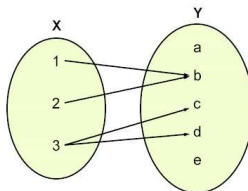


Função sobrejectiva

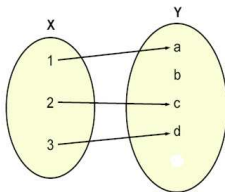


Função bijectiva

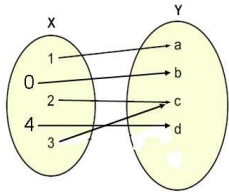
Tipos de funções:



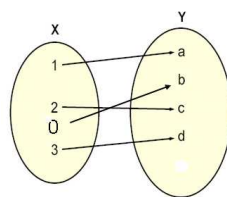
Não é função



Função Injectiva

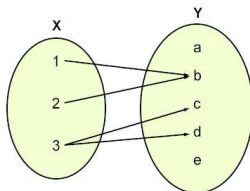


Função sobrejectiva

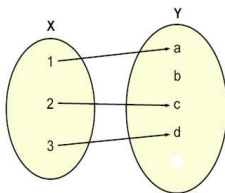


Função bijetiva

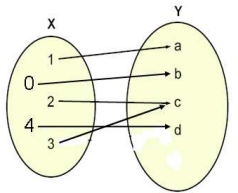
Tipos de funções:



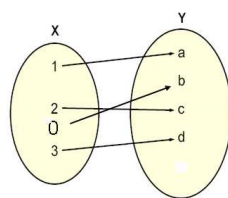
Não é função



Função Injectiva

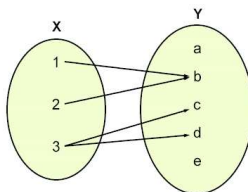


Função sobrejectiva

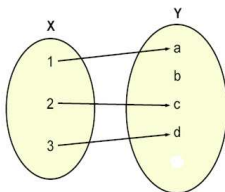


Função bijectiva

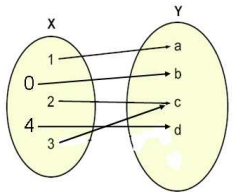
Tipos de funções:



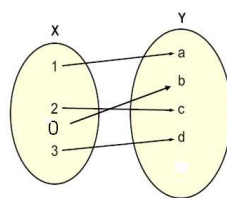
Não é função



Função Injectiva

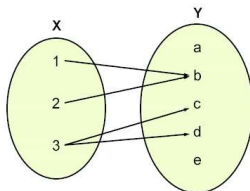


Função sobrejectiva

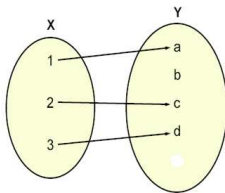


Função bijectiva

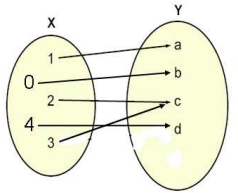
Tipos de funções:



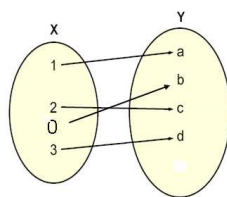
Não é função



Função Injectiva



Função sobrejectiva



Função bijectiva

Definição

Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação.

- f é **sobrejectiva** se

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y,$$

ou seja, se $Im f = Y$.

- f é **injectiva** se

$$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

- f é **bijectiva** se f é sobrejectiva e injectiva.

Definição

Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação.

- f é **sobrejectiva** se

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y,$$

ou seja, se $\text{Im } f = Y$.

- f é **injectiva** se

$$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

- f é **bijectiva** se f é sobrejectiva e injectiva.

Definição

Sejam X e Y conjuntos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação.

- f é **sobrejectiva** se

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y,$$

ou seja, se $\text{Im } f = Y$.

- f é **injectiva** se

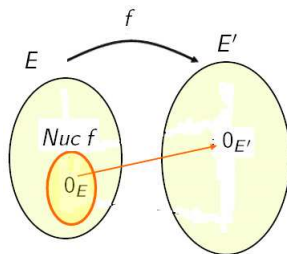
$$\forall x, x' \in X \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

- f é **bijectiva** se f é sobrejectiva e injectiva.

Definição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Define-se **núcleo** de f , e representa-se por $Nuc f$ ou $Ker f$, o conjunto

$$Nuc f = \{u \in E : f(u) = 0_{E'}\} \subseteq E.$$



Observação

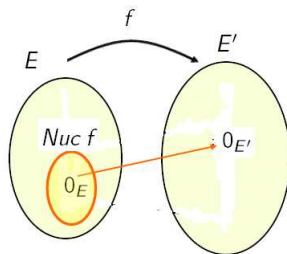
$$Nuc f \subseteq E$$

$$Im f = \{f(u) : u \in E\} \subseteq E'$$

Definição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Define-se **núcleo** de f , e representa-se por $\text{Nuc } f$ ou $\text{Ker } f$, o conjunto

$$\text{Nuc } f = \{u \in E : f(u) = 0_{E'}\} \subseteq E.$$



Observação

$$\text{Nuc } f \subseteq E$$

$$\text{Im } f = \{f(u) : u \in E\} \subseteq E'$$

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então

- 1 $\text{Nuc } f$ é um subespaço de E .
- 2 $\text{Im } f$ é um subespaço de E' .

Exercício

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, 2z). \end{aligned}$$

- 1 Determine uma base de $\text{Nuc } f$ e a sua dimensão;
- 2 Determine uma base de $\text{Im } f$ e a sua dimensão;
- 3 f é sobrejectiva? É injectiva?

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então

- 1 $\text{Nuc } f$ é um subespaço de E .
- 2 $\text{Im } f$ é um subespaço de E' .

Exercício

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, 2z). \end{aligned}$$

- 1 Determine uma base de $\text{Nuc } f$ e a sua dimensão;
- 2 Determine uma base de $\text{Im } f$ e a sua dimensão;
- 3 f é sobrejectiva? É injectiva?

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então

- 1 $\text{Nuc } f$ é um subespaço de E .
- 2 $\text{Im } f$ é um subespaço de E' .

Exercício

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, 2z). \end{aligned}$$

- 1 Determine uma base de $\text{Nuc } f$ e a sua dimensão;
- 2 Determine uma base de $\text{Im } f$ e a sua dimensão;
- 3 f é sobrejectiva? É injectiva?

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então

- 1 $\text{Nuc } f$ é um subespaço de E .
- 2 $\text{Im } f$ é um subespaço de E' .

Exercício

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, 2z). \end{aligned}$$

- 1 Determine uma base de $\text{Nuc } f$ e a sua dimensão;
- 2 Determine uma base de $\text{Im } f$ e a sua dimensão;
- 3 f é sobrejectiva? É injectiva?

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear então

- 1 $\text{Nuc } f$ é um subespaço de E .
- 2 $\text{Im } f$ é um subespaço de E' .

Exercício

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + y, 2z). \end{aligned}$$

- 1 Determine uma base de $\text{Nuc } f$ e a sua dimensão;
- 2 Determine uma base de $\text{Im } f$ e a sua dimensão;
- 3 f é sobrejectiva? É injectiva?

Observação

Seja $f : E \rightarrow E'$ é aplicação linear.

- 1 Conhecendo $\text{Im } f$ sabemos se f é sobrejectiva. Como?
(f é sobrejectiva sse $\text{Im } f = E'$)
- 2 Conhecendo $\text{Nuc } f$ sabemos se f é injectiva. Como?



Proposição

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se

f é injectiva sse $\text{Nuc } f = \{0_E\}$.

Observação

Seja $f : E \rightarrow E'$ é aplicação linear.

- 1 Conhecendo $\text{Im } f$ sabemos se f é sobrejectiva. Como?
(f é sobrejectiva sse $\text{Im } f = E'$)
- 2 Conhecendo $\text{Nuc } f$ sabemos se f é injectiva. Como?



Proposição

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se

f é injectiva sse $\text{Nuc } f = \{0_E\}$.

Observação

Seja $f : E \rightarrow E'$ é aplicação linear.

- 1 Conhecendo $\text{Im } f$ sabemos se f é sobrejectiva. Como?
(f é sobrejectiva sse $\text{Im } f = E'$)
- 2 Conhecendo $\text{Nuc } f$ sabemos se f é injectiva. Como?



Proposição

Seja $f : E \rightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se

f é injectiva sse $\text{Nuc } f = \{0_E\}$.

Teorema da Extensão Linear

Exercício

Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida nos vectores da base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$, por

$$\underline{\underline{f(1, 1, 1) = (1, 2)}}, \quad \underline{\underline{f(0, 1, 0) = (-1, 3)}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{f(0, 0, 1) = (1, 0)}}.$$

- 1 Considere um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ e escreva-o como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$;
- 2 Determine $f(x, y, z)$.

Observação

Para conhecer uma aplicação linear basta saber os valores que a mesma toma nos vectores de uma base do espaço vectorial de partida.

Teorema da Extensão Linear

Exercício

Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida nos vectores da base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$, por

$$\underline{\underline{f(1, 1, 1) = (1, 2)}}, \quad \underline{\underline{f(0, 1, 0) = (-1, 3)}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{f(0, 0, 1) = (1, 0)}}.$$

- 1 Considere um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ e escreva-o como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$;
- 2 Determine $f(x, y, z)$.

Observação

Para conhecer uma aplicação linear basta saber os valores que a mesma toma nos vectores de uma base do espaço vectorial de partida.

Teorema da Extensão Linear

Exercício

Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida nos vectores da base $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$, por

$$\underline{\underline{f(1, 1, 1) = (1, 2)}}, \quad \underline{\underline{f(0, 1, 0) = (-1, 3)}} \quad \text{e} \quad \underline{\underline{f(0, 0, 1) = (1, 0)}}.$$

- 1 Considere um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ e escreva-o como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$;
- 2 Determine $f(x, y, z)$.

Observação

Para conhecer uma aplicação linear basta saber os valores que a mesma toma nos vectores de uma base do espaço vectorial de partida.

Teorema

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

- ① Se $E = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ então

$$\text{Im } f = \langle f(v_1), \dots, f(v_s) \rangle.$$

(Diz-se que f transforma geradores de E em geradores de $\text{Im } f$).

- ② Se $u_1, \dots, u_r \in E$ são linearmente independentes e f é injectiva então $f(u_1), \dots, f(u_r)$ são linearmente independentes (em E').

(Diz-se que se f é injectiva então f transforma vectores l.i. (de E) em vectores l.i. de $\text{Im } f \subseteq E'$)



Teorema

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

- ① Se $E = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$ então

$$\text{Im } f = \langle f(v_1), \dots, f(v_s) \rangle.$$

(Diz-se que f transforma geradores de E em geradores de $\text{Im } f$).

- ② Se $u_1, \dots, u_r \in E$ são linearmente independentes e f é injectiva então $f(u_1), \dots, f(u_r)$ são linearmente independentes (em E').

(Diz-se que se f é injectiva então f transforma vectores l.i. (de E) em vectores l.i. de $\text{Im } f \subseteq E'$)

