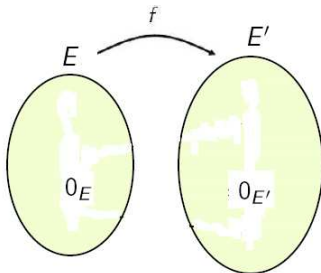


Teorema da Dimensão

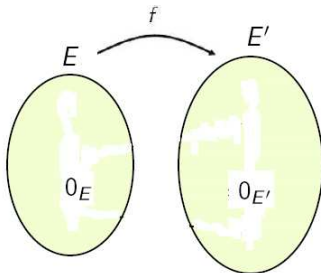


Teorema (Teorema da Dimensão)

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear, com E de dimensão finita, então $\text{Nuc } f$ e $\text{Im } f$ também têm dimensão finita e

$$\underline{\underline{\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.}}$$

Teorema da Dimensão

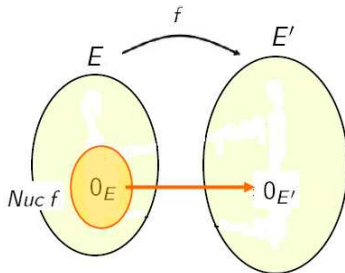


Teorema (Teorema da Dimensão)

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear, com E de dimensão finita, então $\text{Nuc } f$ e $\text{Im } f$ também têm dimensão finita e

$$\underline{\underline{\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.}}$$

Teorema da Dimensão

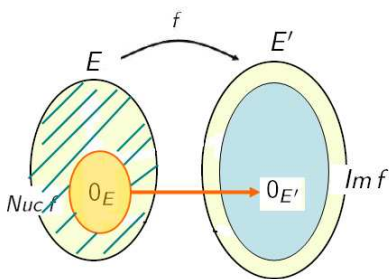


Teorema (Teorema da Dimensão)

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear, com E de dimensão finita, então $Nuc\ f$ e $Im\ f$ também têm dimensão finita e

$$\underline{\underline{\dim E = \dim Nuc\ f + \dim Im\ f.}}$$

Teorema da Dimensão



Teorema (Teorema da Dimensão)

Se $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear, com E de dimensão finita, então $\text{Nuc } f$ e $\text{Im } f$ também têm dimensão finita e

$$\underline{\underline{\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.}}$$

Exercício

- 1 Considere uma aplicação linear da forma

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4.$$

Utilizando o teorema da dimensão justifique que f não pode ser sobrejectiva.

- 2 Considere uma aplicação linear da forma

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Utilizando o teorema da dimensão justifique que f não pode ser injectiva.

- 3 Considere uma aplicação linear da forma

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Justifique que é injectiva se e só se é sobrejectiva.

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

5.6, 5.7, 5.10, 5.14, 5.24, 5.24, 5.26

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Definição

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ uma base de E' .

Designa-se por **matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$** (por esta ordem), e representa-se por

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'),$$

a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ cuja coluna j , $j = 1, \dots, n$, é a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base $\mathcal{B}'$. Assim

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \dots + a_{mj}e'_m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Exemplo

1. Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 2z),$$

e fixe-se em $\mathbb{R}^3$ a base

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)),$$

e em $\mathbb{R}^2$ a base

$$\mathcal{B}'_1 = ((1, 1), (0, 1)).$$

Pretende-se determinar

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = ?.$$

matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}'_1$

Exemplo

1. Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 2z),$$

e fixe-se em $\mathbb{R}^3$ a base

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)),$$

e em $\mathbb{R}^2$ a base

$$\mathcal{B}'_1 = ((1, 1), (0, 1)).$$

Pretende-se determinar

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = ?.$$

matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}'_1$

- 1 Começar por calcular as imagens por f dos vectores de $\mathcal{B}_1$:

$$f(1, 1, 1) = (2, 2), \quad f(1, 1, 0) = (2, 0), \quad f(0, 1, 1) = (1, 2).$$

- 2 Agora consideram-se os elementos obtidos e encontram-se as suas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}'_1$:

$$f(1, 1, 1) = (2, 2) = 2(1, 1) + 0(0, 1)$$

$$f(1, 1, 0) = (2, 0) = 2(1, 1) + -2(0, 1)$$

$$f(0, 1, 1) = (1, 2) = 1(1, 1) + 1(0, 1).$$

- 3 Finalmente pegam-se nas coordenadas obtidas e colocam-se em colunas na matriz (pela ordem dos elementos de $\mathcal{B}_1$):

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

2. Considere a mesma aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 2z).$$

Fixe-se em $\mathbb{R}^3$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ (*b.c.* $_{\mathbb{R}^3}$)

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)),$$

e em $\mathbb{R}^2$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ (*b.c.* $_{\mathbb{R}^2}$)

$$\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 1)).$$

Pretende-se determinar

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = ?.$$

matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

- 1 Começam-se por calcular as imagens por f dos elementos de $\mathcal{B}$:

$$f(1, 0, 0) = (1 + 0, 2 \times 0) = (1, 0), \quad f(0, 1, 0) = (0 + 1, 2 \times 0) = (1, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = (0 + 0, 2 \times 1) = (0, 2).$$

- 2 Agora consideram-se os elementos obtidos e encontram-se as suas coordenadas em relação à base $\mathcal{B}'$:

$$f(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 2) = 0(1, 0) + 2(0, 1).$$

- 3 Finalmente pegam-se nas coordenadas obtidas e colocam-se em colunas na matriz (pela ordem dos elementos de $\mathcal{B}$):

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual a importância da matriz de uma aplicação linear?

Exemplo

Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 2z).$$

cuja matriz relativamente às bases

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)) \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}'_1 = ((1, 1), (0, 1)) \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

é

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos $f(5, 4, 3)$.

1º Usando a definição de f : Ora, $f(5, 4, 3) = (5 + 4, 2 \times 3) = (9, 6)$.

Qual a importância da matriz de uma aplicação linear?

Exemplo

Considere a aplicação linear

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y, 2z).$$

cuja matriz relativamente às bases

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)) \quad \text{em } \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{B}'_1 = ((1, 1), (0, 1)) \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

é

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculemos $f(5, 4, 3)$.

1º Usando a definição de f : Ora, $f(5, 4, 3) = (5 + 4, 2 \times 3) = (9, 6)$.

2º Usando a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$

- 1 Encontrem-se as coordenadas de $(5, 4, 3)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(5, 4, 3) = 4(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-1)(0, 1, 1).$$

- 2 Considera-se o vector das coordenadas obtidas, $(4, 1, -1)$, e multiplica-se à direita da matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pegam-se nas coordenadas obtidas e distribuem-se pela base $\mathcal{B}'$,

$$9(1, 1) + -3(0, 1) = (9, 6) = f(5, 4, 3).$$

2º Usando a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$

- 1 Encontrem-se as coordenadas de $(5, 4, 3)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(5, 4, 3) = 4(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-1)(0, 1, 1).$$

- 2 Considera-se o vector das coordenadas obtidas, $(4, 1, -1)$, e multiplica-se à direita da matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pegam-se nas coordenadas obtidas e distribuem-se pela base $\mathcal{B}'$,

$$9(1, 1) + -3(0, 1) = (9, 6) = f(5, 4, 3).$$

2º Usando a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$

- 1 Encontrem-se as coordenadas de $(5, 4, 3)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(5, 4, 3) = 4(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-1)(0, 1, 1).$$

- 2 Considera-se o vector das coordenadas obtidas, $(4, 1, -1)$, e multiplica-se à direita da matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pegam-se nas coordenadas obtidas e distribuem-se pela base $\mathcal{B}'$,

$$9(1, 1) + -3(0, 1) = (9, 6) = f(5, 4, 3).$$

2º Usando a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$

- 1 Encontrem-se as coordenadas de $(5, 4, 3)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(5, 4, 3) = 4(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-1)(0, 1, 1).$$

- 2 Considera-se o vector das coordenadas obtidas, $(4, 1, -1)$, e multiplica-se à direita da matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Pegam-se nas coordenadas obtidas e distribuem-se pela base $\mathcal{B}'$,

$$9(1, 1) + -3(0, 1) = (9, 6) = f(5, 4, 3).$$

2º Usando a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$

- 1 Encontrem-se as coordenadas de $(5, 4, 3)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(5, 4, 3) = 4(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + (-1)(0, 1, 1).$$

- 2 Considera-se o vector das coordenadas obtidas, $(4, 1, -1)$, e multiplica-se à direita da matriz

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } u \text{ na base } \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}}_{\text{Coordenadas de } f(u) \text{ na base } \mathcal{B}'}$$

Coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ Coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$

Pegam-se nas coordenadas obtidas e distribuem-se pela base $\mathcal{B}'$,

$$9(1, 1) + -3(0, 1) = (9, 6) = f(5, 4, 3).$$

Exemplo

Sejam

$\mathcal{B} = ((1, 1, 2), (0, 2, 6), (0, 0, -4))$ uma base de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2))$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $f(1, -3, -6)$.

Começemos por determinar a sequência das coordenadas do vector $u = (1, -3, -6)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(1, -3, -6) = \alpha_1(1, 1, 2) + \alpha_2(0, 2, 6) + \alpha_3(0, 0, -4).$$

Exemplo

Sejam

$\mathcal{B} = ((1, 1, 2), (0, 2, 6), (0, 0, -4))$ uma base de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2))$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $f(1, -3, -6)$.

Começemos por determinar a sequência das coordenadas do vector $u = (1, -3, -6)$ na base $\mathcal{B}$,

$$(1, -3, -6) = \alpha_1(1, 1, 2) + \alpha_2(0, 2, 6) + \alpha_3(0, 0, -4).$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 - 4\alpha_3 = -6 \end{cases} \quad \stackrel{(resolvendo)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}.$$

Tem-se então,

$$(1, -3, -6) = 1(1, 1, 2) + (-2)(0, 2, 6) + (-1)(0, 0, -4).$$

Agora considera-se a sequência de coordenadas $(1, -2, -1)$ e multiplica-se à direita pela matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A sequência $(-1, 3)$ não é diretamente $f(u)$, mas é a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2))$. Tem-se então

$$\begin{aligned} f(u) &= -1(1, 0) + 3(0, 2) \\ &= (-1, 6). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 - 4\alpha_3 = -6 \end{cases} \quad \stackrel{(resolvendo)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}.$$

Tem-se então,

$$(1, -3, -6) = 1(1, 1, 2) + (-2)(0, 2, 6) + (-1)(0, 0, -4).$$

Agora considera-se a sequência de coordenadas $(1, -2, -1)$ e multiplica-se à direita pela matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$,

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A sequência $(-1, 3)$ não é diretamente $f(u)$, mas é a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2))$. Tem-se então

$$\begin{aligned} f(u) &= -1(1, 0) + 3(0, 2) \\ &= (-1, 6). \end{aligned}$$

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de E , $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ uma base de E' e $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de um vector $u \in E$ na base $\mathcal{B}$ então a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ tal que

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Matriz Mudança de Base

Exemplo

Consideremos a aplicação linear

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, y).$$

Considerem-se as bases $\mathcal{B} = ((2, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1))$. Então,

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pois

Matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}_1$

$$id_{\mathbb{R}^2}(2, 1) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1),$$

Matriz Mudança de Base

Exemplo

Consideremos a aplicação linear

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, y).$$

Considerem-se as bases $\mathcal{B} = ((2, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1))$. Então,

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pois

Matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}_1$

$$id_{\mathbb{R}^2}(2, 1) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1),$$

Matriz Mudança de Base

Exemplo

Consideremos a aplicação linear

$$id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, y).$$

Considerem-se as bases $\mathcal{B} = ((2, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1))$. Então,

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

pois

Matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}_1$

$$id_{\mathbb{R}^2}(2, 1) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1),$$

e

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

pois

Matriz mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}$

$$id_{\mathbb{R}^2}(1, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(2, 1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(2, 1) + 1(0, 1).$$

Observação: Confirmar que:

- ❶ Se $A = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ então $A^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})$.
- ❷ $M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = I_2$.

Definição

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de E designamos por **matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$** a matriz

$$\mathcal{M}(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

e

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

pois

Matriz mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}$

$$id_{\mathbb{R}^2}(1, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(2, 1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(2, 1) + 1(0, 1).$$

Observação: Confirmar que:

- ❶ Se $A = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ então $A^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})$.
- ❷ $M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = I_2$.

Definição

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de E designamos por **matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$** a matriz

$$\mathcal{M}(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

e

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

pois

Matriz mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}$

$$id_{\mathbb{R}^2}(1, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(2, 1) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0, 1)$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(0, 1) = (0, 1) = 0(2, 1) + 1(0, 1).$$

Observação: Confirmar que:

- ❶ Se $A = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ então $A^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B})$.
- ❷ $M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = I_2$.

Definição

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de E designamos por **matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$** a matriz

$$\mathcal{M}(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Qual a importância da matriz mudança de base?

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 0), (0, 1))$.
A matriz mudança de base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o vector $v = (3, 2)$ cujas coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_1$ são $(3, -1)$ pois

$$(3, 2) = 3(1, 1) + (-1)(0, 1),$$

e as coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_2$ são $(\frac{3}{2}, 2)$ pois

$$(3, 2) = \frac{3}{2}(2, 0) + 2(0, 1).$$

Qual a importância da matriz mudança de base?

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 0), (0, 1))$.
A matriz mudança de base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o vector $\mathbf{v} = (3, 2)$ cujas coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_1$ são $(3, -1)$ pois

$$(3, 2) = 3(1, 1) + (-1)(0, 1),$$

e as coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_2$ são $(\frac{3}{2}, 2)$ pois

$$(3, 2) = \frac{3}{2}(2, 0) + 2(0, 1).$$

Qual a importância da matriz mudança de base?

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 0), (0, 1))$.
A matriz mudança de base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o vector $\mathbf{v} = (3, 2)$ cujas coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_1$ são $(3, -1)$ pois

$$(3, 2) = 3(1, 1) + (-1)(0, 1),$$

e as coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_2$ são $(\frac{3}{2}, 2)$ pois

$$(3, 2) = \frac{3}{2}(2, 0) + 2(0, 1).$$

Qual a importância da matriz mudança de base?

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 0), (0, 1))$.
A matriz mudança de base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o vector $\mathbf{v} = (3, 2)$ cujas coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_1$ são $(3, -1)$ pois

$$(3, 2) = 3(1, 1) + (-1)(0, 1),$$

e as coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_2$ são $(\frac{3}{2}, 2)$ pois

$$(3, 2) = \frac{3}{2}(2, 0) + 2(0, 1).$$

Qual a importância da matriz mudança de base?

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 0), (0, 1))$.
A matriz mudança de base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o vector $\mathbf{v} = (3, 2)$ cujas coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_1$ são $(3, -1)$ pois

$$(3, 2) = 3(1, 1) + (-1)(0, 1),$$

e as coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_2$ são $(\frac{3}{2}, 2)$ pois

$$(3, 2) = \frac{3}{2}(2, 0) + 2(0, 1).$$

Qual a importância da matriz mudança de base?

Exemplo

Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((2, 0), (0, 1))$.
A matriz mudança de base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ é

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o vector $\mathbf{v} = (3, 2)$ cujas coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_1$ são $(3, -1)$ pois

$$(3, 2) = 3(1, 1) + (-1)(0, 1),$$

e as coordenadas relativamente à base $\mathcal{B}_2$ são $(\frac{3}{2}, 2)$ pois

$$(3, 2) = \frac{3}{2}(2, 0) + 2(0, 1).$$

Repare-se que

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_1$ $\uparrow$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_2$ $\uparrow$

Conclusão : A matriz de mudança de base de $(\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2)$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}_1$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e seja $v \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_2$ é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ com

$$M(\text{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Repare-se que

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_1$ $\uparrow$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_2$ $\uparrow$

Conclusão : A matriz de mudança de base de $(\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2)$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}_1$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e seja $v \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_2$ é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ com

$$M(\text{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Repare-se que

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_1 \uparrow$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_2 \uparrow$

Conclusão : A matriz de mudança de base de $(\mathcal{B}_1 \text{ para } \mathcal{B}_2)$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}_1$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e seja $v \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_2$ é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ com

$$M(\text{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Repare-se que

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_1$ $\uparrow$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_2$ $\uparrow$

Conclusão : A matriz de mudança de base de $(\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2)$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}_1$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e seja $v \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_2$ é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ com

$$M(\text{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Repare-se que

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_1 \uparrow$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_2 \uparrow$

Conclusão : A matriz de mudança de base de $(\mathcal{B}_1 \text{ para } \mathcal{B}_2)$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}_1$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e seja $v \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_2$ é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ com

$$M(\text{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Repare-se que

$$M(\text{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_1 \uparrow$

Coord. de v na base $\mathcal{B}_2 \uparrow$

Conclusão : A matriz de mudança de base de $(\mathcal{B}_1 \text{ para } \mathcal{B}_2)$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}_1$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}_2$.

Proposição

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de E e seja $v \in E$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas de v na base $\mathcal{B}_2$ é $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ com

$$M(\text{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Composição de aplicações lineares

Sejam E , E' e E'' e.v.,

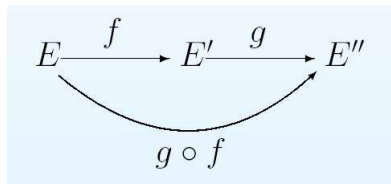
$$f : E \longrightarrow E', \quad g : E' \longrightarrow E''$$

duas aplicações lineares. Considere-se a **composição** de g após f , que se designa por $g \circ f$, e é a aplicação

$$g \circ f : E \longrightarrow E''$$

$$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Diagrama:



Então $g \circ f$ é linear.

Composição de aplicações lineares

Sejam E , E' e E'' e.v.,

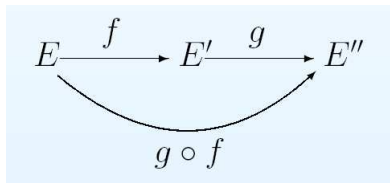
$$f : E \longrightarrow E', \quad g : E' \longrightarrow E''$$

duas aplicações lineares. Considere-se a **composição** de g após f , que se designa por $g \circ f$, e é a aplicação

$$g \circ f : E \longrightarrow E''$$

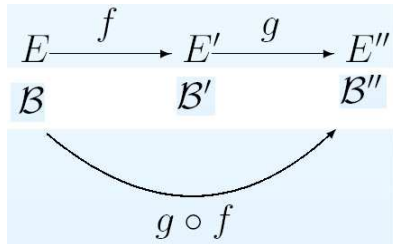
$$x \mapsto g \circ f(x) = g(f(x))$$

Diagrama:



Então $g \circ f$ é linear.

Coloque-se uma base em cada espaço.



Temos agora 3 matrizes associadas a este diagrama:

$$f \longleftrightarrow \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

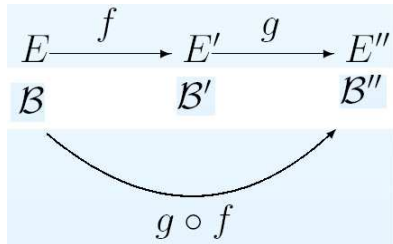
$$g \longleftrightarrow \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$

$$g \circ f \longleftrightarrow \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$$

Qual a relação entre elas?

$$\underline{\underline{\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')}}}$$

Coloque-se uma base em cada espaço.



Temos agora 3 matrizes associadas a este diagrama:

$$f \longleftrightarrow \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

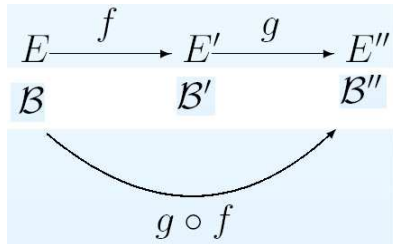
$$g \longleftrightarrow \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$

$$g \circ f \longleftrightarrow \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$$

Qual a relação entre elas?

$$\underline{\underline{\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')}}}$$

Coloque-se uma base em cada espaço.



Temos agora 3 matrizes associadas a este diagrama:

$$f \longleftrightarrow \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

$$g \longleftrightarrow \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$

$$g \circ f \longleftrightarrow \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$$

Qual a relação entre elas?

$$\underline{\underline{\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')}}$$

Teorema

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E''$ aplicações lineares. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ bases, respectivamente, de E , E' e E'' . Se $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ então

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Exercício: Considere as aplicações lineares

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, x+y) \quad (a, b, c) \mapsto (a, b, c, a+b+c).$$

Considere em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ as respectivas bases canónicas.

1. Determine a expressão analítica de $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) = g(\underbrace{x}, \underbrace{y}, \underbrace{x+y}) \\ &= (x, y, x+y, x+y+x+y) = (x, y, x+y, 2x+2y). \end{aligned}$$

2. Determine $\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Ora,

$$\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício: Considere as aplicações lineares

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, x+y) \quad (a, b, c) \mapsto (a, b, c, a+b+c).$$

Considere em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ as respectivas bases canónicas.

1. Determine a expressão analítica de $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) = g(\underbrace{x}, \underbrace{y}, \underbrace{x+y}) \\ &= (x, y, x+y, x+y+x+y) = (x, y, x+y, 2x+2y). \end{aligned}$$

2. Determine $\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Ora,

$$\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício: Considere as aplicações lineares

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, x+y) \quad (a, b, c) \mapsto (a, b, c, a+b+c).$$

Considere em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ as respectivas bases canónicas.

1. Determine a expressão analítica de $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) = g(\underbrace{x}, \underbrace{y}, \underbrace{x+y}) \\ &= (x, y, x+y, x+y+x+y) = (x, y, x+y, 2x+2y). \end{aligned}$$

2. Determine $\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Ora,

$$\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício: Considere as aplicações lineares

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, x+y) \quad (a, b, c) \mapsto (a, b, c, a+b+c).$$

Considere em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ as respectivas bases canónicas.

1. Determine a expressão analítica de $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) = g(\underbrace{x}, \underbrace{y}, \underbrace{x+y}) \\ &= (x, y, x+y, x+y+x+y) = (x, y, x+y, 2x+2y). \end{aligned}$$

2. Determine $\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3)$ e $\mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Ora,

$$\mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Determine $\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Tem-se que

$$\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1 Confirme que

$$\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4) = \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3).$$

Efectivamente tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Determine $\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Tem-se que

$$\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

❶ Confirme que

$$\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4) = \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3).$$

Efectivamente tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Determine $\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4)$.

Tem-se que

$$\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

❶ Confirme que

$$\mathcal{M}(g \circ f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^4) = \mathcal{M}(g; b.c.\mathbb{R}^3, b.c.\mathbb{R}^4) \mathcal{M}(f; b.c.\mathbb{R}^2, b.c.\mathbb{R}^3).$$

Efectivamente tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Algumas informações obtidas da matriz de uma aplicação linear $f : E \rightarrow E'$:

- 1 Permite-nos obter a expressão da aplicação ou seja, determinar $f(u)$;
- 2 Permite-nos conhecer $\dim \text{Im } f$;

Efectivamente se

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \quad \text{então} \quad r(A) = \dim \text{Im } f. \quad (\text{Teorema}).$$

- 3 Permite-nos saber se f é bijectiva ou não.

Efectivamente,

$$f \text{ é bijectiva} \Leftrightarrow A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \text{ é invertível} \quad (\text{Teorema})$$



Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

5.36, 5.39, 5.40, 5.41, 5.42, 5.43, 5.44(c)