# 1.2 Operações com matrizes (Multiplicação de matrizes)

## Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Define-se **produto da matriz** $A$ **pela matriz** $B$, e representa-se por $AB$, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \cdots + A_{in}B_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, p.$$

Assim,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

## Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

**Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes?** **NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de $A$ igual ao **número de linhas** de $B$.

## Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9+1\times(-8)+2\times(-1) & 0\times 8+1\times(-2)+2\times 0 & 0\times 7+1\times 6+2\times 4 \\ 3\times 9+0\times(-8)+5\times(-1) & 3\times 8+0\times(-2)+5\times 0 & 3\times 7+0\times 6+5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

**Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes? NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de $A$ igual ao **número de linhas** de $B$.

## Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

**Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes?** **NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de $A$ igual ao **número de linhas** de $B$.

## Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

**Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes?** **NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de $A$ igual ao **número de linhas** de $B$.

## Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1 \times (-8) + 2 \times (-1) & 0\times 8 + 1 \times (-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0 \times (-8) + 5 \times (-1) & 3\times 8 + 0 \times (-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

**Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes?** **NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de $A$ igual ao **número de linhas** de $B$.

## Exemplo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{B} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1 \times (-8) + 2 \times (-1) & 0\times 8 + 1 \times (-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0 \times (-8) + 5 \times (-1) & 3\times 8 + 0 \times (-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

**Pode-se sempre efectuar o produto de duas matrizes?** **NÃO!!!!**

Da definição resulta que para se conseguir efectuar o produto temos de ter o **número de colunas** de $A$ igual ao **número de linhas** de $B$.

## Exemplo

$$\textit{Sejam } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Podemos efectuar o produto $AB$?*

*Sim, $A$ é do tipo $3 \times 4$ e $B$ é do tipo $4 \times 2$.*

*Assim a matriz $AB$ será uma matriz do tipo $3 \times 2$.*

*Efetuando o produto,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

*Podemos efectuar o produto AB?*

*Sim,* $A$ *é do tipo* $3 \times 4$ *e* $B$ *é do tipo* $4 \times 2$.

*Assim a matriz AB será uma matriz do tipo* $3 \times 2$.

*Efetuando o produto,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

*Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

*Podemos efectuar o produto* $AB$*?*

*Sim,* $A$ *é do tipo* $3 \times 4$ *e* $B$ *é do tipo* $4 \times 2$.

*Assim a matriz* $AB$ *será uma matriz do tipo* $3 \times 2$.

*Efetuando o produto,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo

*Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

*Podemos efectuar o produto* $AB$*?*

*Sim,* $A$ *é do tipo* $3 \times 4$ *e* $B$ *é do tipo* $4 \times 2$.

*Assim a matriz* $AB$ *será uma matriz do tipo* $3 \times 2$.

*Efetuando o produto,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

# Nota: (Geral...)

Se $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então:

- $AB = [(AB)_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$;
- O elemento $(i,j)$ da matriz produto $AB$ é

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & B_{1j} & \cdots \\ \cdots & B_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Conclusão: $(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de $A$ pela j-ésima matriz coluna de $B$.

## Nota: (Geral...)

Se $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então:

- $AB = [(AB)_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$;
- O elemento $(i,j)$ da matriz produto $AB$ é

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & B_{1j} & \cdots \\ \cdots & B_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{nj} & \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Conclusão: $(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de $A$ pela j-ésima matriz coluna de $B$.

## Nota: (Geral...)

Se $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então:

- $AB = [(AB)_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$;
- O elemento $(i,j)$ da matriz produto $AB$ é

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & B_{1j} & \cdots \\ \cdots & B_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Conclusão: $(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de $A$ pela j-ésima matriz coluna de $B$.

## Nota: (Geral...)

Se $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [B_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ então:

- $AB = [(AB)_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$;
- O elemento $(i, j)$ da matriz produto $AB$ é

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & B_{1j} & \cdots \\ \cdots & B_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & B_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Conclusão: $(AB)_{ij}$ é o produto da i-ésima matriz linha de $A$ pela j-ésima matriz coluna de $B$.

## Atenção que o produto de matrizes não é comutativo...

**Exemplo**

*Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

*Tem-se que*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*mas*

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Donde,*

$$AB \neq BA.$$

## Atenção que o produto de matrizes não é comutativo...

**Exemplo**

*Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

*Tem-se que*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*mas*

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Donde,*

$$AB \neq BA.$$

## Atenção que o produto de matrizes não é comutativo...

### Exemplo

*Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
*Tem-se que*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*mas*

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Donde,*

$$AB \neq BA.$$

## Proposição

*Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B$, $C$ matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),
   $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

## Proposição

*Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B$, $C$ matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),

   $(B+C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

## Proposição

*Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B$, $C$ matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),

   $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

## Proposição

*Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B$, $C$ matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B+C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),

   $(B+C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

## Proposição

*Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B$, $C$ matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),

   $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

## Proposição

*Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam $B$, $C$ matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se*

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa);
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva, à esquerda),

   $(B + C)A = BA + CA$ (distributiva, à direita);
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_m A = A$.

Nota: Repare-se que as anteriores propriedades são usadas sempre que efectuam cáculos em $\mathbb{K}$.

Há no entanto algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ que não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. A multiplicação de matrizes não é comutativa (já visto no exemplo anterior);

2. $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

3. $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
$(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

Nota: Quando não for importante especificar a ordem da matriz nula, em vez da notação $0_{n\times m}$ usa-se simplesmente a notação 0.

Há no entanto algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ que não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. A multiplicação de matrizes não é comutativa (já visto no exemplo anterior);
2. $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
   isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
3. $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
   $(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

Nota: Quando não for importante especificar a ordem da matriz nula, em vez da notação $0_{n\times m}$ usa-se simplesmente a notação 0.

Há no entanto algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ que não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. A multiplicação de matrizes não é comutativa (já visto no exemplo anterior);
2. $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
   isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
3. $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
   $(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

Nota: Quando não for importante especificar a ordem da matriz nula, em vez da notação $0_{n\times m}$ usa-se simplesmente a notação 0.

Há no entanto algumas das propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ que não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

1. A multiplicação de matrizes não é comutativa (já visto no exemplo anterior);
2. $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
   isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
3. $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$,
   $(BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C$.

Nota: Quando não for importante especificar a ordem da matriz nula, em vez da notação $0_{n\times m}$ usa-se simplesmente a notação 0.

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** $(k \in \mathbb{N}_0)$ à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

## Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

**Exemplo** Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

## Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

### Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **potência de expoente $k$ de $A$** ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representa-se por $A^k$, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Exemplo Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Tem-se que,

$A^0 = I_2$,

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

### Proposição

*Quaisquer que sejam* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

### Observação

*Em geral, se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k. \quad \textbf{Porquê?}$$

### Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.83, 1.87, 1.89

## Proposição

*Quaisquer que sejam $k, l \in \mathbb{N}_0$, tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

## Observação

*Em geral, se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{N}$, então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k. \quad \textbf{Porquê?}$$

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.83, 1.87, 1.89

## Proposição

*Quaisquer que sejam* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

## Observação

*Em geral, se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$ **Porquê?**

### Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.83, 1.87, 1.89

## Proposição

*Quaisquer que sejam* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

## Observação

*Em geral, se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k. \quad \textbf{Porquê?}$$

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.83, 1.87, 1.89

## Proposição

*Quaisquer que sejam* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

## Observação

*Em geral, se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k. \quad \textbf{Porquê?}$$

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.83, 1.87, 1.89

## Proposição

*Quaisquer que sejam* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

## Observação

*Em geral, se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k \in \mathbb{N}$, *então*

$$(AB)^k \neq A^k B^k.$$ **Porquê?**

## Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.70, 1.71, 1.72, 1.73, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78, 1.79, 1.83, 1.87, 1.89