

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática

Programa

- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de Equações Lineares
- 3 Determinantes
- 4 Espaços Vectoriais
- 5 Aplicações Lineares
- 6 **Valores e Vectores Próprios**
- 7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
- 8 Geometria Analítica

Valores e vectores próprios



a matriz com o vector próprio de ouro

*Saiba como calcular um vector próprio de uma matriz valeu ao Google
um império de 25 mil milhões de dólares*



Sergey Brin



Larry Page



a matriz com o vector próprio de ouro

*Saiba como calcular um vector próprio de uma matriz valeu ao Google
um império de 25 mil milhões de dólares*



Sergey Brin



Larry Page

Valores e vectores próprios de uma matriz (quadrada)

Exemplo

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X.$$

Diz-se neste caso que:

- $\alpha = 2$ é **valor próprio** da matriz A ;
- $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{K})$ é **vector próprio** de A associado ao valor próprio $\alpha = 2$.

Valores e vectores próprios de uma matriz (quadrada)

Exemplo

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X.$$

Diz-se neste caso que:

- 1. $\alpha = 2$ é **valor próprio da matriz A** ;
- 2. $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{K})$ é **vector próprio de A** associado ao valor próprio $\alpha = 2$.

Valores e vectores próprios de uma matriz (quadrada)

Exemplo

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X.$$

Diz-se neste caso que:

- 1 $\alpha = 2$ é **valor próprio da matriz A** ;
- 2 $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{K})$ é **vector próprio de A** associado ao valor próprio $\alpha = 2$.

Valores e vectores próprios de uma matriz (quadrada)

Exemplo

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X.$$

Diz-se neste caso que:

- ① $\alpha = 2$ é **valor próprio da matriz A** ;
- ② $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{K})$ é **vector próprio de A** associado ao valor próprio $\alpha = 2$.

Valores e vetores próprios de uma matriz (quadrada)

Exemplo

Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}}_X.$$

Diz-se neste caso que:

- 1 $\alpha = 2$ é **valor próprio da matriz A** ;
- 2 $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{K})$ é **vector próprio de A** associado ao valor próprio $\alpha = 2$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Se $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \setminus 0_{n \times 1}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ tais que

$$\underline{\underline{AX = \alpha X}}$$

então diz-se que:

- 1 α é **valor próprio da matriz A** ;
- 2 X é **vector próprio de A** associado ao valor próprio α .

Observação

O vector $X = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{n \times 1}$ não é considerado um vector próprio de A .

Como determinar os valores próprio de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

A equação

$$AX = \alpha X$$

é equivalente a

$$(A - \alpha I_n)X = 0 \quad (\text{sistema homogéneo}).$$

Para que o sistema homogéneo seja possível e indeterminado (para ter soluções diferentes da solução nula), a matriz $A - \alpha I_n$ não pode ser invertível. Isto significa que

$$\underbrace{\det(A - \alpha I_n)}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Definição

Ao polinómio

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_n|$$

chama-se **polinómio característico de A** .

Como determinar os valores próprio de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

A equação

$$AX = \alpha X$$

é equivalente a

$$(A - \alpha I_n)X = 0 \quad (\text{sistema homogéneo}).$$

Para que o sistema homogéneo seja possível e indeterminado (para ter soluções diferentes da solução nula), a matriz $A - \alpha I_n$ não pode ser invertível. Isto significa que

$$\underbrace{\det(A - \alpha I_n)}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Definição

Ao polinómio

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_n|$$

chama-se **polinómio característico de A** .

Como determinar os valores próprio de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

A equação

$$AX = \alpha X$$

é equivalente a

$$(A - \alpha I_n)X = 0 \quad (\text{sistema homogéneo}).$$

Para que o sistema homogéneo seja possível e indeterminado (para ter soluções diferentes da solução nula), a matriz $A - \alpha I_n$ não pode ser invertível. Isto significa que

$$\underbrace{\det(A - \alpha I_n)}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Definição

Ao polinómio

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_n|$$

chama-se **polinómio característico de A** .

Como determinar os valores próprio de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

A equação

$$AX = \alpha X$$

é equivalente a

$$(A - \alpha I_n)X = 0 \quad (\text{sistema homogéneo}).$$

Para que o sistema homogéneo seja possível e indeterminado (para ter soluções diferentes da solução nula), a matriz $A - \alpha I_n$ não pode ser invertível. Isto significa que

$$\underbrace{\det(A - \alpha I_n)}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Definição

Ao polinómio

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_n|$$

chama-se **polinómio característico de A** .

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então,

$$\alpha \text{ é valor próprio de } A \quad \text{sse} \quad \underbrace{|A - \alpha I_n|}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então,

$$\alpha \text{ é valor próprio de } A \quad \text{sse} \quad \underbrace{|A - \alpha I_n|}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. Determine os valores próprios da matriz A ;

- Obter o polinómio característico de A :

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \dots$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então,

$$\alpha \text{ é valor próprio de } A \quad \text{sse} \quad \underbrace{|A - \alpha I_n|}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \dots$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então,

$$\alpha \text{ é valor próprio de } A \quad \text{sse} \quad \underbrace{|A - \alpha I_n|}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \dots$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então,

$$\alpha \text{ é valor próprio de } A \quad \text{sse} \quad \underbrace{|A - \alpha I_n|}_{P_A(\alpha)} = 0.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \dots$$

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1=0 \vee \alpha^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-1 \vee \alpha=0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{ccc} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{array} \right|$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1 = 0 \vee \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha+1 = 0 \vee \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A.

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \vee \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{ccc} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{array} \right|$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \vee \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{ccc} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{array} \right|$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \vee \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A

$$= \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{ccc} -1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1-\alpha \end{array} \right|$$

$$= (-1-\alpha)(-1-\alpha)(1-\alpha) + (-1-\alpha)$$

$$= (-1-\alpha) \left[(-1-\alpha)(1-\alpha) + 1 \right] = \underbrace{-(\alpha+1)\alpha^2}$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -(\alpha+1)\alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 1 = 0 \vee \alpha^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \vee \alpha = 0$$

Conclusão: $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$ são os valores próprios de A

Observação

$$\alpha = -1 \quad \vee \quad \alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\alpha = -1} \quad \vee \quad \underbrace{\alpha = 0}$$

Raíz de multiplicidade 1

Raíz de multiplicidade 2



$$ma(-1) = 1$$

$$ma(0) = 2$$

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α é um valor próprio de A . Designa-se por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α , e representa-se por

$$ma(\alpha),$$

a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A .

Observação

$$\alpha = -1 \quad \vee \quad \alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\alpha = -1} \quad \vee \quad \underbrace{\alpha = 0}$$

Raíz de multiplicidade 1

Raíz de multiplicidade 2



$$ma(-1) = 1$$

$$ma(0) = 2$$

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α é um valor próprio de A . Designa-se por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α , e representa-se por

$$ma(\alpha),$$

a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A .

Observação

$$\alpha = -1 \quad \vee \quad \alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\alpha = -1} \quad \vee \quad \underbrace{\alpha = 0}$$

Raíz de multiplicidade 1

Raíz de multiplicidade 2



$$ma(-1) = 1$$

$$ma(0) = 2$$

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α é um valor próprio de A . Designa-se por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α , e representa-se por

$$ma(\alpha),$$

a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A .

Observação

$$\alpha = -1 \quad \vee \quad \alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\alpha = -1} \quad \vee \quad \underbrace{\alpha = 0}$$

Raíz de multiplicidade 1

Raíz de multiplicidade 2



$$ma(-1) = 1$$

$$ma(0) = 2$$

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e α é um valor próprio de A . Designa-se por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α , e representa-se por

$$ma(\alpha),$$

a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A .

Como determinar os vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

Dado um valor próprio $\alpha \in \mathbb{K}$, queremos $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ que sejam solução do sistema

$$AX = \alpha X \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)X = 0. \quad (\text{Possível e Indeterminado.})$$

O conjunto de todas as soluções do sistema anterior vamos representar por M_α . Assim,

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a que se chama subespaço próprio de A associado ao valor próprio α .

Definição

Chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio α , à dimensão do subespaço M_α e representa-se por

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Como determinar os vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

Dado um valor próprio $\alpha \in \mathbb{K}$, queremos $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ que sejam solução do sistema

$$AX = \alpha X \quad \Leftrightarrow \quad (A - \alpha I_n)X = 0. \quad (\text{Possível e Indeterminado.})$$

O conjunto de todas as soluções do sistema anterior vamos representar por M_α . Assim,

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a que se chama subespaço próprio de A associado ao valor próprio α .

Definição

Chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio α , à dimensão do subespaço M_α e representa-se por

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Como determinar os vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

Dado um valor próprio $\alpha \in \mathbb{K}$, queremos $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ que sejam solução do sistema

$$AX = \alpha X \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)X = 0. \quad (\text{Possível e Indeterminado.})$$

O conjunto de todas as soluções do sistema anterior vamos representar por M_α . Assim,

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a que se chama subespaço próprio de A associado ao valor próprio α .

Definição

Chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio α , à dimensão do subespaço M_α e representa-se por

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Como determinar os vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

Dado um valor próprio $\alpha \in \mathbb{K}$, queremos $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ que sejam solução do sistema

$$AX = \alpha X \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)X = 0. \quad (\text{Possível e Indeterminado.})$$

O conjunto de todas as soluções do sistema anterior vamos representar por M_α . Assim,

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a que se chama subespaço próprio de A associado ao valor próprio α .

Definição

Chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio α , à dimensão do subespaço M_α e representa-se por

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Como determinar os vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$?

Dado um valor próprio $\alpha \in \mathbb{K}$, queremos $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ que sejam solução do sistema

$$AX = \alpha X \Leftrightarrow (A - \alpha I_n)X = 0. \quad (\text{Possível e Indeterminado.})$$

O conjunto de todas as soluções do sistema anterior vamos representar por M_α . Assim,

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : (A - \alpha I_n)X = 0\} \end{aligned}$$

Este conjunto é um subespaço de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ a que se chama subespaço próprio de A associado ao valor próprio α .

Definição

Chama-se **multiplicidade geométrica** do valor próprio α , à dimensão do subespaço M_α e representa-se por

$$mg(\alpha) = \dim M_\alpha.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Os valores próprios (determinados em 1.) são $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$. Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{M}_{-1}$ e $\underline{M}_0$, onde

$$M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3)X = 0\}$$

$$M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (0)I_3)X = 0\}.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Os valores próprios (determinados em 1.) são $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$. Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{M}_{-1}$ e $\underline{M}_0$, onde

$$M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3)X = 0\}$$

$$M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (0)I_3)X = 0\}.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Os valores próprios (determinados em 1.) são $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$. Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{M}_{-1}$ e $\underline{M}_0$, onde

$$M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3)X = 0\}$$

$$M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (0)I_3)X = 0\}.$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Os valores próprios (determinados em 1.) são $\alpha = -1$ e $\alpha = 0$. Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{M}_{-1}$ e $\underline{M}_0$, onde

$$M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3)X = 0\}$$

$$M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (0)I_3)X = 0\}.$$

$$\underline{\underline{M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (-1)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1) & 1 \\ 0 & -1 & 1 - (-1) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\ell_1 + (2)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{Assim, } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (-1)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1) & 1 \\ 0 & -1 & 1 - (-1) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\ell_1 + (2)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{Assim, } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (-1)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1) & 1 \\ 0 & -1 & 1 - (-1) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\ell_1 + (2)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Assim, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} x \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (-1)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1) & 1 \\ 0 & -1 & 1 - (-1) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\ell_1 + (2)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Assim, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} x \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (-1)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1) & 1 \\ 0 & -1 & 1 - (-1) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\ell_1 + (2)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Assim, $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} x \in \mathbb{R}$

$$\underline{\underline{M_{-1} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (-1)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$\begin{aligned} (A - (-1)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 - (-1) & 0 & 0 \\ 0 & -1 - (-1) & 1 \\ 0 & -1 & 1 - (-1) \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\ell_1 + (2)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{Assim, } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} .

Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} .

Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} .
Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} .
Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} .
Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} .

Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

e o subespaço M_{-1} é dado por

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(x, 0, 0) = x_1(1, 0, 0)$$

pelo que

$$M_{-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \simeq \langle (1, 0, 0) \rangle.$$

Como a sequência $((1, 0, 0))$ gera M_{-1} e é l.i., então é uma base de M_{-1} . Tem-se que

$$mg(-1) = \dim M_{-1} = 1.$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : (A - (0)I_3)X = 0\} = ?}}$$

$$(A - (0)I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 + (-1)\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} (-1)\ell_1 \\ (-1)\ell_2 \end{smallmatrix}]{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e o subespaço M_0 é dado por

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x = 0, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

pelo que

$$M_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Como a sequência $((0, 1, 1))$ gera M_0 e é l.i., então é uma base de M_0 .

Tem-se que

$$\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1.$$

e o subespaço M_0 é dado por

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x = 0, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

pelo que

$$M_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Como a sequência $((0, 1, 1))$ gera M_0 e é l.i., então é uma base de M_0 .

Tem-se que

$$\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1.$$

e o subespaço M_0 é dado por

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x = 0, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

pelo que

$$M_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Como a sequência $((0, 1, 1))$ gera M_0 e é l.i., então é uma base de M_0 .

Tem-se que

$$\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1.$$

e o subespaço M_0 é dado por

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x = 0, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

pelo que

$$M_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Como a sequência $((0, 1, 1))$ gera M_0 e é l.i., então é uma base de M_0 .
Tem-se que

$$mg(0) = \dim M_0 = 1.$$

e o subespaço M_0 é dado por

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x = 0, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

pelo que

$$M_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Como a sequência $((0, 1, 1))$ gera M_0 e é l.i., então é uma base de M_0 .
Tem-se que

$$mg(0) = \dim M_0 = 1.$$

e o subespaço M_0 é dado por

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : x = 0, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(0, z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ora,

$$(0, z, z) = z(0, 1, 1)$$

pelo que

$$M_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle.$$

Como a sequência $((0, 1, 1))$ gera M_0 e é l.i., então é uma base de M_0 .
Tem-se que

$$\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1.$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0$;
- ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0$;
- ④ $k \leq n$;
- ⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0$;
- ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0$;
- ④ $k \leq n$;
- ⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $k \leq n;$

⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $k \leq n;$

⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $k \leq n;$

⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0$;
- ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0$;
- ④ $k \leq n$;
- ⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0$;
- ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0$;
- ④ $k \leq n$;
- ⑤ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.