

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

Exercício

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

1. *Determine os valores próprios da matriz A;*

- Obter o polinómio característico de A:

$$p_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \vee \alpha = 2 \vee \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \vee \alpha = 2 \vee \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1.$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1.$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1.$$

$$P_A(\alpha) = |A - \alpha I_3| = \begin{vmatrix} -\alpha & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -\alpha(2 - \alpha)(3 - \alpha) + 2(2 - \alpha) = (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2).$$

(Polinómio grau 3 pois A é matriz 3×3)

- Obter as raízes (zeros) do polinómio característico:

$$p_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2 - \alpha)(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2 = 0 \vee \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 2 \quad \vee \quad \alpha = 1$$

Conclusão: $\alpha = 2$ e $\alpha = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidades algébricas

$$ma(2) = 2, \quad ma(1) = 1.$$

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{\underline{M_2}}$ e $\underline{\underline{M_1}}$, onde

$$M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (2)I_3)X = 0\}$$

$$M_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (1)I_3)X = 0\}.$$

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{\underline{M_2}}$ e $\underline{\underline{M_1}}$, onde

$$M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (2)I_3)X = 0\}$$

$$M_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (1)I_3)X = 0\}.$$

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{\underline{M_2}}$ e $\underline{\underline{M_1}}$, onde

$$M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (2)I_3)X = 0\}$$

$$M_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (1)I_3)X = 0\}.$$

Exercício

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

2. *Determine os subespaços próprios de A . Indique uma base para cada um dos subespaços e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.*

Pretende-se então determinar os subespaços $\underline{\underline{M_2}}$ e $\underline{\underline{M_1}}$, onde

$$M_2 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (2)I_3)X = 0\}$$

$$M_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (1)I_3)X = 0\}.$$

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_2(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_2(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_2(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_A(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_2(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_2(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $m_2(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $mg(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $mg(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $mg(2) = 2$.

$$M_2 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \frac{1}{2}\ell_1]{\ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -z \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e$$

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ y \\ z \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \{(-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

$= \langle (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle$. Como os vectores geradores de M_2 são l.i.

então $\dim M_2 = 2$ ou seja $mg(2) = 2$.

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i., então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i., então $\dim(M_1) = 1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $mg(1)=1$

$$M_1 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{K}) : \underbrace{(A - 1I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Resolvendo o sistema,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{\ell_2 + \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2z \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad e \quad M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} \\ \simeq \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 1) \rangle$$

Como os vectores geradores de M_1 são l.i. então $\text{mg}(1)=1$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0$;
 ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0$;
 ④ $1 \leq m_g(\alpha_i) \leq m_a(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
 ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0$;
 ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0$;
 ④ $1 \leq m_g(\alpha_i) \leq m_a(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
 ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $1 \leq m_g(\alpha_i) \leq m_a(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
- ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
- ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
 ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
 ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$

③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$

④ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
 ② A não tem o valor próprio zero.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ os valores próprios de A .

- ① O polinómio característico tem grau n , isto é, é da forma

$$P_A(x) = |A - xI_n| = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0;$$

- ② $P_A(\alpha_i) = |A - \alpha_i I_n| = 0;$
 ③ $P_A(0) = |A - 0I_n| = |A| = a_0;$
 ④ $1 \leq mg(\alpha_i) \leq ma(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, k.$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

- ① A é invertível;
 ② A não tem o valor próprio zero.

Matrizes semelhantes

Definição

Sejam A e B duas matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. A e B dizem-se **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Matrizes semelhantes

Definição

Sejam A e B duas matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. A e B dizem-se **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes,

porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Matrizes semelhantes

Definição

Sejam A e B duas matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. A e B dizem-se **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Matrizes semelhantes

Definição

Sejam A e B duas matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. A e B dizem-se **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Matrizes semelhantes

Definição

Sejam A e B duas matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. A e B dizem-se **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Matrizes semelhantes

Definição

Sejam A e B duas matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. A e B dizem-se **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ são semelhantes, porque a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível e

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Proposição

Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são semelhantes então:

- 1 A e B têm o mesmo polinómio característico ($P_A(x) = P_B(x)$);
- 2 A e B têm os mesmos valores próprios, com as mesmas multiplicidades algébricas.

Proposição

Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são semelhantes então:

- 1 A e B têm o mesmo polinómio característico ($P_A(x) = P_B(x)$);
- 2 A e B têm os mesmos valores próprios, com as mesmas multiplicidades algébricas.

Questão: Quais os valores próprios de uma matriz diagonal,

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} ?$$

Resposta: Claro que são os elementos da diagonal principal da matriz $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal, i.e., se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Observação

À matriz P (quando existe) chama-se matriz **diagonalizante** de A .

Questão: Quais os valores próprios de uma matriz diagonal,

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} ?$$

Resposta: Claro que são os elementos da diagonal principal da matriz $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal, i.e., se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Observação

À matriz P (quando existe) chama-se matriz **diagonalizante** de A .

Questão: Quais os valores próprios de uma matriz diagonal,

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} ?$$

Resposta: Claro que são os elementos da diagonal principal da matriz $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal, i.e., se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Observação

À matriz P (quando existe) chama-se matriz **diagonalizante** de A .

Questão: Quais os valores próprios de uma matriz diagonal,

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} ?$$

Resposta: Claro que são os elementos da diagonal principal da matriz $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal, i.e., se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Observação

À matriz P (quando existe) chama-se matriz **diagonalizante** de A .

Caracterização das matrizes diagonalizáveis

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Então,

A é diagonalizável

se e só se

a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de A é $= n$



Exemplo

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Exercício aula passada}),$$

tem como valores próprios os elementos $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$, cujas multiplicidades geométricas são $mg(-1) = 1$ e $mg(0) = 1$. Assim,

$$mg(-1) + mg(0) = 2 \neq 3.$$

Exemplo

Vejamos se $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável e se for, determinemos uma matriz diagonalizante.

1. Verificação do critério de diagonalização:

Anteriormente vimos que os valores próprios de A são:

- ① $\alpha = 2$ com $mg(2) = 2$ e cuja base de M_2 é $((0, 1, 0), (-1, 0, 1))$;
- ② $\alpha = 1$ com $mg(1) = 1$ e cuja base de M_1 é $((-2, 1, 1))$.

Como

$$mg(2) + mg(1) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem da matriz} \Rightarrow A \text{ é diagonalizável}$$

2. Determinação da matriz diagonal e da diagonalizante:

Assim, por exemplo

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se de certeza que

$$P^{-1}AP = D.$$

Observação

Calculando P^{-1} obtém-se

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad P^{-1}AP = D.$$

Outra escolha poderá ser

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(encontre ainda um outra matriz D e outra P) .

Outra escolha poderá ser

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(encontre ainda um outra matriz D e outra P) .

Uma aplicação da diagonalização

Quando se sabe que uma matriz é diagonalizável, torna-se simples calcular potências dessa matriz.

Exemplo

No exercício anterior viu-se que é diagonalizável a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tendo-se

$$P^{-1}AP = D, \quad \text{com } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que se pretende calcular $A^{20} = A \times A \times A \times \dots \times A = ?$

Uma aplicação da diagonalização

Quando se sabe que uma matriz é diagonalizável, torna-se simples calcular potências dessa matriz.

Exemplo

No exercício anterior viu-se que é diagonalizável a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tendo-se

$$P^{-1}AP = D, \quad \text{com } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que se pretende calcular $A^{20} = A \times A \times A \times \dots \times A = ?$

Uma aplicação da diagonalização

Quando se sabe que uma matriz é diagonalizável, torna-se simples calcular potências dessa matriz.

Exemplo

No exercício anterior viu-se que é diagonalizável a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

tendo-se

$$P^{-1}AP = D, \quad \text{com } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que se pretende calcular $A^{20} = A \times A \times A \times \dots \times A = ?$

Ora,

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{20} = (PDP^{-1})^{20}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}(PDP^{-1})^{20} &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\&= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)DP^{-1} \\&= PD^{20}P^{-1} \\&= P \begin{bmatrix} 2^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{20} \end{bmatrix} P^{-1}.\end{aligned}$$

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

6.2, 6.37, 6.43, 6.81, 6.82, 6.87, 6.89