Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

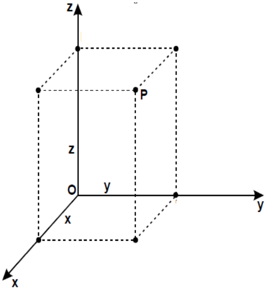
Departamento de Matemática

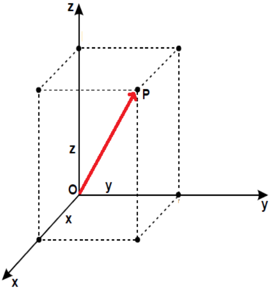
Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

7., 8. Um pouco de geometria analítica

Cada ponto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser representado na forma:



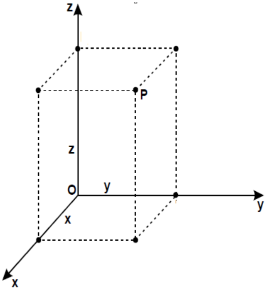


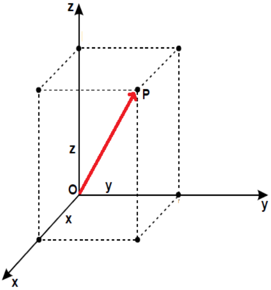
Em $\mathbb{R}^3$ sabemos:

1. Somar vectores (pontos): $(1, 2, 3) + (-1, 2, 5) = (0, 4, 8)$
2. Multiplicar um escalar por um vector: $4\,(1, 2, 3) = (4, 8, 12)$

7., 8. Um pouco de geometria analítica

Cada ponto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser representado na forma:



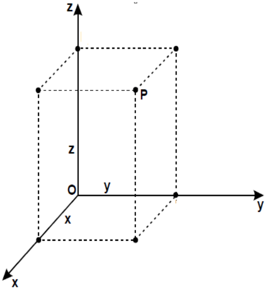


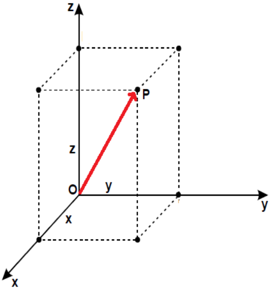
Em $\mathbb{R}^3$ sabemos:

1. Somar vectores (pontos): $(1, 2, 3) + (-1, 2, 5) = (0, 4, 8)$
2. Multiplicar um escalar por um vector: $4\,(1, 2, 3) = (4, 8, 12)$

7., 8. Um pouco de geometria analítica

Cada ponto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser representado na forma:



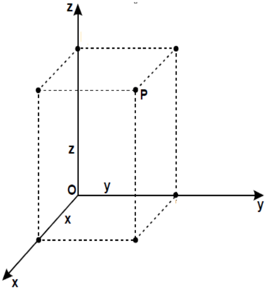


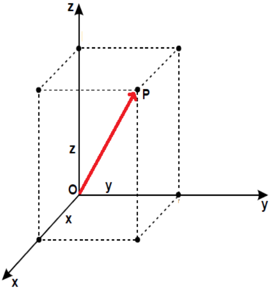
Em $\mathbb{R}^3$ sabemos:

1. Somar vectores (pontos): $(1, 2, 3) + (-1, 2, 5) = (0, 4, 8)$
2. Multiplicar um escalar por um vector: $4\,(1, 2, 3) = (4, 8, 12)$

7., 8. Um pouco de geometria analítica

Cada ponto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser representado na forma:





Em $\mathbb{R}^3$ sabemos:

1. Somar vectores (pontos): $(1, 2, 3) + (-1, 2, 5) = (0, 4, 8)$
2. Multiplicar um escalar por um vector: $4\,(1, 2, 3) = (4, 8, 12)$

Produto interno de vectores

Definição

Dados dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, chama-se **produto interno** de u e v, ao número real

$$u|v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplo

1. $(1, 2, 5)|(0, -1, 1) = 1.0 + 2.(-1) + 5.1 = 3;$
2. $(0, 0, 0)|(5, -7, 2) = ... = 0;$
3. $(1, 2, 3)|(2, -1, 0) = ... = 0.$

Observação

Atenção que o produto interno de vectores dá um número real e não um vector.

Produto interno de vectores

Definição

Dados dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, chama-se **produto interno** de u e v, ao número real

$$u|v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplo

1. $(1, 2, 5)|(0, -1, 1) = 1.0 + 2.(-1) + 5.1 = 3;$
2. $(0, 0, 0)|(5, -7, 2) = ... = 0;$
3. $(1, 2, 3)|(2, -1, 0) = ... = 0.$

Observação

Atenção que o produto interno de vectores dá um número real e não um vector.

Produto interno de vectores

Definição

Dados dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, chama-se **produto interno** de u e v, ao número real

$$u|v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Exemplo

1. $(1,2,5)|(0,-1,1) = 1.0 + 2.(-1) + 5.1 = 3;$
2. $(0,0,0)|(5,-7,2) = ... = 0;$
3. $(1,2,3)|(2,-1,0) = ... = 0.$

Observação

Atenção que o produto interno de vectores dá um número real e não um vector.

Produto interno de vectores

Definição

Dados dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, chama-se **produto interno** de u e v, ao número real

$$u|v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplo

1. $(1, 2, 5)|(0, -1, 1) = 1.0 + 2.(-1) + 5.1 = 3;$
2. $(0, 0, 0)|(5, -7, 2) = ... = 0;$
3. $(1, 2, 3)|(2, -1, 0) = ... = 0.$

Observação

Atenção que o produto interno de vectores dá um número real e não um vector.

Produto interno de vectores

Definição

Dados dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, chama-se **produto interno** de u e v, ao número real

$$u|v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplo

1. $(1, 2, 5)|(0, -1, 1) = 1.0 + 2.(-1) + 5.1 = 3;$
2. $(0, 0, 0)|(5, -7, 2) = ... = 0;$
3. $(1, 2, 3)|(2, -1, 0) = ... = 0.$

Observação

Atenção que o produto interno de vectores dá um número real e não um vector.

Produto interno de vectores

Definição

Dados dois vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, chama-se **produto interno** de u e v, ao número real

$$u|v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Exemplo

1. $(1, 2, 5)|(0, -1, 1) = 1.0 + 2.(-1) + 5.1 = 3;$
2. $(0, 0, 0)|(5, -7, 2) = ... = 0;$
3. $(1, 2, 3)|(2, -1, 0) = ... = 0.$

Observação

Atenção que o produto interno de vectores dá um número real e não um vector.

Propriedades do produto interno

Proposição

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Tem-se que:*

1. $u|v = v|u$;
2. $(u+v)|w = u|w \;+\; v|w$;
3. $(\alpha u)|v = \alpha(u|v) = u|(\alpha v)$;
4. $u|u \geq 0$;
5. $u|u = 0$ **sse** $u = (0,0,0)$.

Norma de um vector

Definição

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um vector de $\mathbb{R}^3$. Chama-se **norma** de u ao número real não negativo,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \text{(norma euclideana).}$$

Exemplo

1. $\|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$;
2. $\|(0,0,0)\| = \ldots = 0$;
3. $\|(\frac{1}{3}, 0, -\frac{\sqrt{8}}{3})\| = \ldots = 1$. *(vector unitário)*

Norma de um vector

Definição

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um vector de $\mathbb{R}^3$. Chama-se **norma** de u ao número real não negativo,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \text{(norma euclideana).}$$

Exemplo

1. $\|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$;
2. $\|(0, 0, 0)\| = \ldots = 0$;
3. $\|(\frac{1}{3}, 0, -\frac{\sqrt{8}}{3})\| = \ldots = 1.$ *(vector unitário)*

Norma de um vector

Definição

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um vector de $\mathbb{R}^3$. Chama-se **norma** de u ao número real não negativo,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \text{(norma euclideana).}$$

Exemplo

1. $\|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$;
2. $\|(0, 0, 0)\| = \ldots = 0$;
3. $\|(\frac{1}{3}, 0, -\frac{\sqrt{8}}{3})\| = \ldots = 1.$ *(vector unitário)*

Norma de um vector

Definição

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um vector de $\mathbb{R}^3$. Chama-se **norma** de u ao número real não negativo,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \text{(norma euclideana)}.$$

Exemplo

1. $\|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$;
2. $\|(0,0,0)\| = \ldots = 0$;
3. $\|(\frac{1}{3}, 0, -\frac{\sqrt{8}}{3})\| = \ldots = 1.$ *(vector unitário)*

Norma de um vector

Definição

Seja $u = (u_1, u_2, u_3)$ é um vector de $\mathbb{R}^3$. Chama-se **norma** de u ao número real não negativo,

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \qquad \text{(norma euclideana).}$$

Exemplo

1. $\|(1,2,3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$;
2. $\|(0,0,0)\| = \ldots = 0$;
3. $\|(\frac{1}{3}, 0, -\frac{\sqrt{8}}{3})\| = \ldots = 1.$ *(vector unitário)*

Propriedades da norma

Proposição

Para qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que:*

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0$ **sse** $u = (0,0,0)$;
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

Exemplo

$$\|(-100, -200, -200)\| = \| - 100(1,2,2)\| = |100| \|(1,2,2)\|$$
$$= 100 \times \sqrt{9} = 300.$$

Propriedades da norma

Proposição

Para qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que:*

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0$ **sse** $u = (0, 0, 0)$;
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

Exemplo

$$\|(-100, -200, -200)\| = \| -100(1, 2, 2)\| = |100| \|(1, 2, 2)\|$$
$$= 100 \times \sqrt{9} = 300.$$

Propriedades da norma

Proposição

Para qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que:*

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0$ **sse** $u = (0, 0, 0)$;
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

Exemplo

$$\|(-100, -200, -200)\| = \| -100(1, 2, 2)\| = |100| \|(1, 2, 2)\|$$
$$= 100 \times \sqrt{9} = 300.$$

Propriedades da norma

Proposição

Para qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se que:*

1. $\|u\| \geq 0$;
2. $\|u\| = 0$ **sse** $u = (0, 0, 0)$;
3. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

Exemplo

$$\begin{aligned}\|(-100, -200, -200)\| &= \| -100(1, 2, 2)\| = |100| \|(1, 2, 2)\| \\ &= 100 \times \sqrt{9} = 300.\end{aligned}$$

Definição

Um vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ diz-se **unitário** se

$$\|u\| = 1.$$

Como obter vectores unitários?

Exemplo

Considere-se o vector não nulo $u = (1, -2, 2)$.
O vector u tem norma

$$\|u\| = \|(1, -2, 2)\| = \sqrt{1+4+4} = 3.$$

Para obter um vector unitário a partir de u basta considerar o vector

$$v = \frac{1}{\|u\|}u = \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Definição

Um vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ diz-se **unitário** se

$$\|u\| = 1.$$

Como obter vectores unitários?

Exemplo

Considere-se o vector não nulo $u = (1, -2, 2)$.
O vector u *tem norma*

$$\|u\| = \|(1, -2, 2)\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Para obter um vector unitário a partir de u *basta considerar o vector*

$$v = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Definição

Um vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ diz-se **unitário** se

$$\|u\| = 1.$$

Como obter vectores unitários?

Exemplo

Considere-se o vector não nulo $u = (1, -2, 2)$.
O vector u *tem norma*

$$\|u\| = \|(1, -2, 2)\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Para obter um vector unitário a partir de u *basta considerar o vector*

$$v = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{3}(1, -2, 2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Definição

Um vector $u = (u_1, u_2, u_3) \in R^3$ diz-se **unitário** se

$$\|u\| = 1.$$

Como obter vectores unitários?

Exemplo

Considere-se o vector não nulo $u = (1, -2, 2)$.
O vector u *tem norma*

$$\|u\| = \|(1, -2, 2)\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

Para obter um vector unitário a partir de u *basta considerar o vector*

$$v = \frac{1}{\|u\|} u = \frac{1}{3}(1, -2, 2) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Exercício

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $F = \langle (2,-2,1), (1,0,1) \rangle$.

1. *Encontre dois vectores que gerem F mas que sejam unitários.*

   Ora, por exemplo

   $$\|(2,-2,1)\| = 3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

   $$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

   tendo-se que $F = \langle (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$.

2. *Indique um vector de F que tenham norma* 200.

   Por exemplo, $u = (2,-2,1)$ *tem norma* $\|u\| = 3$. *Assim basta fazer,*

   $$v = 200 \times \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{400}{3}, \frac{400}{3}, \frac{200}{3}).$$

Exercício

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $F = \langle (2,-2,1),(1,0,1) \rangle$.

1. *Encontre dois vectores que gerem* F *mas que sejam unitários.*
   Ora, por exemplo

$$\|(2,-2,1)\| = 3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

   tendo-se que $F = \langle (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$.

2. *Indique um vector de* F *que tenham norma* 200.
   Por exemplo, $u = (2,-2,1)$ *tem norma* $\|u\| = 3$. *Assim basta fazer,*

$$v = 200 \times \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{400}{3}, \frac{400}{3}, \frac{200}{3}).$$

Exercício

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $F = \langle (2,-2,1),(1,0,1)\rangle$.

1. *Encontre dois vectores que gerem F mas que sejam unitários.*
   Ora, por exemplo

$$\|(2,-2,1)\| = 3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

   tendo-se que $F = \langle (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})\rangle$.

2. *Indique um vector de F que tenham norma* 200.
   Por exemplo, $u = (2,-2,1)$ *tem norma* $\|u\| = 3$. *Assim basta fazer,*

$$v = 200 \times \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{400}{3}, \frac{400}{3}, \frac{200}{3}).$$

Exercício

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $F = \langle (2,-2,1),(1,0,1) \rangle$.

1. *Encontre dois vectores que gerem F mas que sejam unitários.*
   Ora, por exemplo

$$\|(2,-2,1)\| = 3 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\|(1,0,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),$$

   tendo-se que $F = \langle (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$.

2. *Indique um vector de F que tenham norma* 200.
   Por exemplo, $u = (2,-2,1)$ *tem norma* $\|u\| = 3$. *Assim basta fazer,*

$$v = 200 \times \frac{1}{3}(2,2,1) = (\frac{400}{3}, \frac{400}{3}, \frac{200}{3}).$$

Ângulo entre dois vectores

Definição

Dados dois vectores não nulos $u, v \in \mathbb{R}^3$, chama-se **ângulo** entre u e v, e representamos por

$$\measuredangle(u, v),$$

o número real $\measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|}.$$

Observação

Quando u e v são não nulos então

$$u|v = \|u\|\|v\| \cos \measuredangle(u, v).$$

Ângulo entre dois vectores

Definição

Dados dois vectores <u>não nulos</u> $u, v \in \mathbb{R}^3$, chama-se **ângulo** entre u e v, e representamos por

$$\measuredangle(u, v),$$

o número real $\measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|}.$$

Observação

Quando u e v são não nulos então

$$u|v = \|u\|\|v\| \cos \measuredangle(u, v).$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1,0,1)$ e $v = (0,1,1)$.*

   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$u|v = 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos\measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u,v) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores* $u = (1, 0, 1)$ *e* $v = (0, 1, 1)$.
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1,0,1)$ e $v = (0,1,1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u,v) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1,0,1)$ e $v = (0,1,1)$.*

Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u,v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$.*

   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

   Assim,

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

   logo

$$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1,0,1)$ e $v = (0,1,1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2+1^2+1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1\times 0 + 0\times 1 + 1\times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u,v) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Exercício

1. *Determine o ângulo entre os vectores $u = (1,0,1)$ e $v = (0,1,1)$.*
   Ora,

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1.$$

Assim,

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

logo

$$\measuredangle(u,v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares pois

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares *pois*

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares pois

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares pois

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda *perpendiculares* *pois*

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares pois

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*

$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*

$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$

Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares pois

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Vectores perpendiculares e ortogonais

Definição

Dois vectores u e v dizem-se **ortogonais** quando

$$u|v = 0.$$

Exemplo

1. *Os vectores* $u = (0,0,0)$ *e* $v = (2,3,-1)$ *são ortogonais pois,*
$$u|v = 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times (-1) = 0;$$

2. *Os vectores* $u = (1,0,0)$ *e* $v = (0,1,0)$ *são ortogonais pois*
$$u|v = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0.$$
Neste caso os vectores dizem-se ainda perpendiculares pois
$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\|u\|\|v\|} = 0, \quad \textit{logo} \quad \measuredangle(u,v) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Definição

Dois vectores u e v não nulos dizem-se **perpendiculares** quando

$$\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad (\Rightarrow u|v = 0).$$

Exercício

Considere os vectores $u = (2,0,2)$ *e* $v = (1,k,k)$. *Determine* k *por forma a que os vectores sejam perpendiculares.*

Como u e v são não nulos então é obrigar a que sejam ortogonais.

$$u|v = 0 \Leftrightarrow 2\times 1 + 0\times k + 2\times k = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Definição

Dois vectores u e v não nulos dizem-se **perpendiculares** quando

$$\measuredangle(u,v) = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad (\Rightarrow u|v = 0).$$

Exercício

Considere os vectores $u = (2,0,2)$ *e* $v = (1,k,k)$*. Determine* k *por forma a que os vectores sejam perpendiculares.*

Como u e v são não nulos então é obrigar a que sejam ortogonais.

$$u|v = 0 \Leftrightarrow 2 \times 1 + 0 \times k + 2 \times k = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

Definição

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathcal{B}$ diz-se **ortogonal** quando

$$e_1|e_2 = e_1|e_3 = e_2|e_3 = 0.$$

2. $\mathcal{B}$ diz-se **ortonormada** quando é ortogonal e todos os vectores têm norma 1.

Exemplo

1. *A base canónica de $\mathbb{R}^3$, $b.c_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é ortonormada.*
2. *A base*

$$\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$

também é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Definição

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathcal{B}$ diz-se **ortogonal** quando
$$e_1|e_2 = e_1|e_3 = e_2|e_3 = 0.$$
2. $\mathcal{B}$ diz-se **ortonormada** quando é ortogonal e todos os vectores têm norma 1.

Exemplo

1. *A base canónica de $\mathbb{R}^3$, $b.c_{\mathbb{R}^3} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é ortonormada.*
2. *A base*
$$\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$$
também é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Próximas duas aulas - Revisões....