

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é

invertível.

É B é invertível? **Claro!!!**

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é

invertível.

É B é invertível? Claro!!!

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é

invertível.

É B é invertível? Claro!!!

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é

invertível.

É B invertível? **Claro!!!**

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é invertível.

É B é invertível? Claro!!!

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é invertível.

É B é invertível? **Claro!!!**

1.3 Matrizes invertíveis (Só matrizes quadradas)

Como é bem sabido, todo o número real, não nulo, tem um inverso para a multiplicação

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Dize-se que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, tal que

$$AB = BA = I_n$$

.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem-se $AB = BA = I_2$, logo A é invertível.

É B é invertível? **Claro!!!**

Para A quantas matrizes B podem existir ?

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1} .

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Para A quantas matrizes B podem existir ?

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1} .

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Para A quantas matrizes B podem existir ?

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1} .

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Para A quantas matrizes B podem existir ?

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1} .

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pois $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ?

Não!!!

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para

qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B tal que $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A é não invertível (singular)

Observação

A matriz $0_{n \times m}$ também não é invertível.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ?

Não!!!

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para

qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B tal que $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A é não invertível (singular)

Observação

A matriz $0_{n \times m}$ também não é invertível.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ?

Não!!!

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para

qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B tal que $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A é não invertível (singular)

Observação

A matriz $0_{n \times m}$ também não é invertível.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ?

Não!!!

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para

qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B tal que $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A é não invertível (singular)

Observação

A matriz $0_{n \times m}$ também não é invertível.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ?

Não!!!

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para

qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B tal que $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A é não invertível (singular)

Observação

A matriz $0_{n \times m}$ também não é invertível.

Toda a matriz $A \neq 0$ é invertível ?

Não!!!

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ não tem inversa porque, para

qualquer $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Não existe assim nenhuma matriz B tal que $AB = BA = I_2$.
Diz-se que A é não invertível (singular)

Observação

A matriz $0_{n \times m}$ também não é invertível.

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

- 1 Se $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.
- 2 Se $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

- 1 Se $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.
- 2 Se $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Teorema

- 1 Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2 Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e A é invertível então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} A^{-1}$.
- 3 Se $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.
- 4 Mais geralmente, se $k \in \mathbb{N}$ e $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ são invertíveis então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.



Observação

Não temos fórmula para a inversa de $A + B$. Em geral,

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.$$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exemplo

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são invertíveis tendo-se $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Assim,

- $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(A^{-1})^{-1} = A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $(B^{-1})^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

- $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.4 Transposição de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz transposta** de A , e representa-se por A^T , a matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz transposta** de A , e representa-se por A^T , a matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz transposta** de A , e representa-se por A^T , a matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz transposta** de A , e representa-se por A^T , a matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- 1 $(A^T)^T = A.$
- 2 $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- 3 $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- 4 $(AB)^T = B^T A^T.$
- 5 *Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$*

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- ❶ $(A^T)^T = A.$
- ❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- ❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T.$
- ❺ *Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$*

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- ❶ $(A^T)^T = A.$
- ❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- ❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T.$
- ❺ *Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$*

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- 1 $(A^T)^T = A.$
- 2 $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- 3 $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- 4 $(AB)^T = B^T A^T.$
- 5 Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- 1 $(A^T)^T = A.$
- 2 $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- 3 $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- 4 $(AB)^T = B^T A^T.$
- 5 Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

❶ $(A^T)^T = A.$

❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$

❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$

❹ $(AB)^T = B^T A^T.$

❺ Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- 1 $(A^T)^T = A.$
- 2 $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- 3 $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- 4 $(AB)^T = B^T A^T.$
- 5 Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

❶ $(A^T)^T = A.$

❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$

❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$

❹ $(AB)^T = B^T A^T.$

❺ Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- ❶ $(A^T)^T = A.$
- ❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- ❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T.$
- ❺ Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- ❶ $(A^T)^T = A.$
- ❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- ❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T.$
- ❺ *Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$*

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

- ❶ $(A^T)^T = A.$
- ❷ $(A + B)^T = A^T + B^T.$
- ❸ $(\alpha A)^T = \alpha A^T.$
- ❹ $(AB)^T = B^T A^T.$
- ❺ *Se A é invertível então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$*

Definição

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ diz-se **simétrica** se $A = A^T$ e **hemi-simétrica** se $A = -A^T$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ é simétrica pois $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi-simétrica pois

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -\pi i & -2i \\ \pi i & 0 & 3 \\ 2i & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ não é simétrica nem hemi-simétrica.

Definição

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ diz-se **simétrica** se $A = A^T$ e **hemi-simétrica** se $A = -A^T$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ é simétrica pois $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi-simétrica pois

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -\pi i & -2i \\ \pi i & 0 & 3 \\ 2i & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ não é simétrica nem hemi-simétrica.

Definição

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ diz-se **simétrica** se $A = A^T$ e **hemi-simétrica** se $A = -A^T$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ é simétrica pois $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi-simétrica pois

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -\pi i & -2i \\ \pi i & 0 & 3 \\ 2i & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ não é simétrica nem hemi-simétrica.

Definição

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ diz-se **simétrica** se $A = A^T$ e **hemi-simétrica** se $A = -A^T$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ é simétrica pois $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$.

A matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ é hemi-simétrica pois

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -\pi i & -2i \\ \pi i & 0 & 3 \\ 2i & -3 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ não é simétrica nem hemi-simétrica.