1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **transformação elementar sobre as linhas de A** a uma transformação de um dos seguintes tipos:

I. Troca de posição, na matriz A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$;

II. Multiplicação de uma linha de A por um $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

III. Substituição da linha i de A pela sua soma com linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

Notação

Vai adoptar-se a seguinte notação para as transformações sobre linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\ell_3]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-3)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **transformação elementar sobre as linhas de A** a uma transformação de um dos seguintes tipos:

I. Troca de posição, na matriz A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$;

II. Multiplicação de uma linha de A por um $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

III. Substituição da linha i de A pela sua soma com linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

Notação

Vai adoptar-se a seguinte notação para as transformações sobre linhas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_2]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\ell_3]{} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-3)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Notação

$A \xrightarrow[T]{} B$, significa que a matriz B se obteve de A efectuando a transformação elementar T (de tipo não especificado).

Definição

Diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ **é equivalente por linhas a** $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ se B se pode obter a partir de A efectuando uma sequência finita com k, $k \in \mathbb{N}_0$, transformações elementares sobre linhas. Tal será denotado por

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \ i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Para qualquer transformação elementar sobre linhas* T *existe uma transformação elementar sobre linhas* T' *tal que*

$$A \underset{T}{\longrightarrow} B \underset{T'}{\longrightarrow} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Para qualquer transformação elementar sobre linhas* T *existe uma transformação elementar sobre linhas* T' *tal que*

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

É possivel "anular" uma transformação elementar?

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \underset{T}{\longrightarrow} B \underset{T'}{\longrightarrow} A.$$

Observação

$$A \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} A, \quad i \neq j;$$

$$A \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} B \xrightarrow[\alpha^{-1}\ell_1 i]{} A, \quad \alpha \neq 0;$$

$$A \xrightarrow[\ell_i + \alpha \ell_j]{} B \xrightarrow[\ell_i + (-\alpha)\ell_j]{} A, \quad \alpha \neq 0, \quad i \neq j$$

Diz-se então que qualquer transformação elementar sobre linhas é *"reversível"*.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2\leftrightarrow\ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3+\pi\ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi \ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad pois\ I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad pois\ I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$pois\ I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma única transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chama-se **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_I;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \textit{pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_{II};$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\textit{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_{III}.$$

Exercício

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual a importância das matrizes elementares?

(São invertíveis)

Exercício

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual a importância das matrizes elementares?

(São invertíveis)

Exercício

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual a importância das matrizes elementares?

(São invertíveis)

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*.*
Se

$$I_m \xrightarrow[T]{} E,$$

sendo T *uma transformação elementar sobre* *<u>linhas</u>*, *então*

$$A \xrightarrow[T]{} EA.$$

Nota: Qualquer transformação elementar sobre as linhas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida <u>premutiplicando</u> A (multiplicando à esquerda) por uma matriz elementar que resulta de I_m efectuando nas suas linhas a mesma transformação elementar que se pretende nas linhas de A.

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se efectuarmos a transformação elementar nas linhas de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Se fizermos a mesma transformação elementar nas linhas de I_2, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vejamos que EA dá o mesmo resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se efectuarmos a transformação elementar nas linhas de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Se fizermos a mesma transformação elementar nas linhas de I_2, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_2 - 2\ell_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Vejamos que EA dá o mesmo resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Que matriz se deve multiplicar à esquerda de A para:

1. *obter a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2. *obter a matriz*

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 \\ 2/7 & 5/7 & -2/7 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Que matriz se deve multiplicar à esquerda de A para:

1. *obter a matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2. *obter a matriz*
$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 & 1 \\ 2/7 & 5/7 & -2/7 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Proposição

Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível e tem-se, quaisquer que sejam* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*:*

I. Se $i \neq j$ e $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E^{-1}$ $(E^{-1} = E)$.

II. Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\frac{1}{\alpha}\ell_i]{} E^{-1}$.

III. Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \xrightarrow[\ell_i + \beta \ell_j]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\ell_i + (-\beta)\ell_j]{} E^{-1}$.

As matrizes elementares são invertíveis

Exemplo

Considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como são elementares, então são invertíveis. Quais as suas inversas?

1. E_1 é uma matriz elementar de tipo I e $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. E_2 é uma matriz elementar de tipo II e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. E_3 é uma matriz elementar de tipo III e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como são elementares, então são invertíveis. Quais as suas inversas?

1. E_1 é uma matriz elementar de tipo I e $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. E_2 é uma matriz elementar de tipo II e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. E_3 é uma matriz elementar de tipo III e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como são elementares, então são invertíveis. Quais as suas inversas?

1. E_1 é uma matriz elementar de tipo I e $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. E_2 é uma matriz elementar de tipo II e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. E_3 é uma matriz elementar de tipo III e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como são <u>elementares</u>, então são <u>invertíveis</u>. Quais as suas inversas?

1. E_1 é uma matriz elementar de tipo I e $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. E_2 é uma matriz elementar de tipo II e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. E_3 é uma matriz elementar de tipo III e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo

Considere as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como são <u>elementares</u>, então são <u>invertíveis</u>. Quais as suas inversas?

1. E_1 é uma matriz elementar de tipo I e $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
2. E_2 é uma matriz elementar de tipo II e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. E_3 é uma matriz elementar de tipo III e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício

Justifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, sabendo que

$$A = E_2 E_3 E_1,$$

onde E_1, E_2, E_3 são as matrizes do exemplo anterior. Qual a inversa?

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.9, 1.15, 1.26, 1.27, 1.34, 1.42, 1.43, 1.44, 1.46, 1.140, 1.143, 1.144

Exercício

Justifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, sabendo que

$$A = E_2 E_3 E_1,$$

onde E_1, E_2, E_3 são as matrizes do exemplo anterior. Qual a inversa?

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.9, 1.15, 1.26, 1.27, 1.34, 1.42, 1.43, 1.44, 1.46, 1.140, 1.143, 1.144