1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Chama-se **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha. Considera-se que uma linha nula não tem pivô. Chamam-se pivôs de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Exemplo

Os pivôs da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ são $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -4 \end{bmatrix}$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Chama-se **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha.Considera-se que uma linha nula não tem pivô. Chamam-se pivôs de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Exemplo

Os pivôs da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ são $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -4 \end{bmatrix}$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se:

1. sempre que existir uma linha nula na matriz, as outras linhas abaixo dela serão nulas;
2. em duas linhas quaisquer, não nulas, o pivot da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivot da linha superior.

Exercício

Quais das matrizes em baixo estão em forma de escada?

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é* **equivalente por linhas** *a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad (f.e.).$$

Redução de uma matriz à forma de escada

Exemplo

Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$.

Então, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1+\ell_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\xrightarrow[\ell_2+(-\frac{1}{2})\ell_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

A' está em forma de escada e é equivalente por linhas a A.

Proposição

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é **equivalente por linhas** *a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad (f.e.).$$

Redução de uma matriz à forma de escada

Exemplo

Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$.

Então, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + \ell_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\xrightarrow[\ell_2 + (-\frac{1}{2})\ell_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 + (2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

A' está em forma de escada e é equivalente por linhas a A.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

Exemplos

Calculemos a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (f.e.)$$

Assim, $r(A) = 2$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

Exemplos

Calculemos a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; (f.e.)$$

Assim, $r(A) = 2$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

Exemplos

Calculemos a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3+(-1)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (f.e.)$$

Assim, $r(A) = 2$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

Exemplos

Calculemos a característica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 + (-1)\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 + (-1)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (f.e.)$$

Assim, $r(A) = 2$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ *e* $\mathrm{r}(A) \leq n$, *isto é,*

$$\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Observação

Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ *então é da forma* $A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$*.Após reduzir a matriz à f.e. a matriz obtida só poderão ser de um dos seguintes tipos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) \leq 3$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ *e* $\mathrm{r}(A) \leq n$, *isto é,*

$$\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Observação

Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ *então é da forma* $A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$. *Após reduzir a matriz à f.e. a matriz obtida só poderão ser de um dos seguintes tipos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) \leq 3$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ *e* $\mathrm{r}(A) \leq n$, *isto é,*

$$\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Observação

Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ *então é da forma* $A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$. *Após reduzir a matriz à f.e. a matriz obtida só poderão ser de um dos seguintes tipos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) \leq 3$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ *e* $\mathrm{r}(A) \leq n$*, isto é,*

$$\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Observação

Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{K})$ *então é da forma* $A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$*.Após reduzir a matriz à f.e. a matriz obtida só poderão ser de um dos seguintes tipos:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) \leq 3$.

Definição

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada reduzida** (abreviadamente, denotado por **f.e.r.**) se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Estão em forma de escada reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada reduzida** (abreviadamente, denotado por **f.e.r.**) se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Estão em forma de escada reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição

Qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad (f.e.r.), \ \text{com } A'' \text{ única}.$$

Redução de uma matriz à forma de escada reduzida

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.).$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + 1\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.)$$

Proposição

Qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad (f.e.r.), \text{ com } A'' \text{ única}.$$

Redução de uma matriz à forma de escada reduzida

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(f.e.).$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + 1\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.)$$

Proposição

Qualquer matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad (f.e.r.), \; com \; A'' \; única.$$

Redução de uma matriz à forma de escada reduzida

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (f.e.).$

Então,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + 1\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.)$$

Observação

Uma matriz pode dar origem a diversas suas formas de escada, mas só dá origem a uma matriz em forma de escada reduzida.

Proposição

Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são equivalentes por linhas se e só se têm a mesma forma de escada reduzida.

Exercício

Diga se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.42, 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.52, 1.54, 1.58, 1.59, 1.149, 1.153, 1.154, 1.160

Observação

Uma matriz pode dar origem a diversas suas formas de escada, mas só dá origem a uma matriz em forma de escada reduzida.

Proposição

Duas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são equivalentes por linhas se e só se têm a mesma forma de escada reduzida.

Exercício

Diga se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.42, 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.52, 1.54, 1.58, 1.59, 1.149, 1.153, 1.154, 1.160