1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.
Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

A partir da definição é muitas vezes complicado saber se uma matriz é invertível.

Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Exercício

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. *Qual a característica da matriz A?*
2. *Indique a f.e.r. de A.*
3. *Caracterize a matriz I_3 à custa de A e de matrizes elementares.*
4. *Escreva A como o produto de matrizes elementares.*
5. *Justifique que A é invertível.*
6. *Indique A^{-1}.*

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. $\mathrm{r}(A) = n$.
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Exemplo

Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

Vejamos se A é invertível.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. $\mathrm{r}(A) = n$.
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Exemplo

Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

Vejamos se A é invertível.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Existe uma forma fácil de ver se uma matriz é invertível?

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. $\mathrm{r}(A) = n$.
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Exemplo

Considere a matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$.

Vejamos se A é invertível.

Recorrendo ao teorema anterior,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell 2 + 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $r(A) = 1$ que sendo menor que $2 =$ordem de $A \Rightarrow A$ não é invertível.

Caso A seja invertivel como obter A^{-1} ?

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível podemos calcular A^{-1} do seguinte modo:

1. Partindo de A efectuamos transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n;

2. Partindo da identidade I_n efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas. A matriz obtida no final é A^{-1}.

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Caso A seja invertivel como obter A^{-1} ?

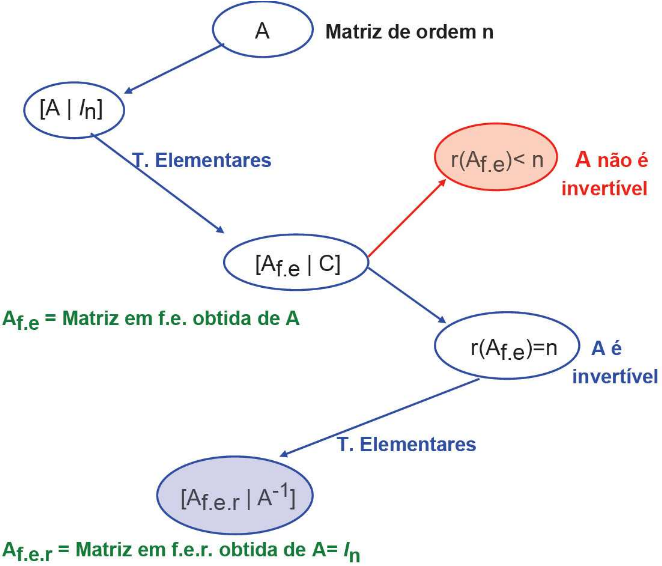
Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível podemos calcular A^{-1} do seguinte modo:

1. Partindo de A efectuamos transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n;

2. Partindo da identidade I_n efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas. A matriz obtida no final é A^{-1}.

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Conclusão: Como saber se A é invertível (esquematicamente):



Exemplo

Consideremos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos, caso exista, a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + (-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right].$$

 Caracterizações das matrizes invertíveis

Exemplo

Consideremos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos, caso exista, a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + (-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right].$$

Exemplo

Consideremos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos, caso exista, a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3+\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1+(-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} & \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}} \end{array}\right].$$

Exemplo

Consideremos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos, caso exista, a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3 + \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 + (-1)\ell_2]{} \left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right].$$

Exemplo

Consideremos a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinemos, caso exista, a sua inversa:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\ell_3+\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1+(-1)\ell_2]{} \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \end{array}\right].$$

Teorema

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se AB é invertível se, e só se, A e B são ambas invertíveis.

Corolário

Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $AB = I_n$ então A e B são ambas invertíveis, tendo-se $A^{-1} = B$ e $BA = I_n$.

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.62, 1.65, 1.66, 1.162, 1.163, 1.165

Teorema

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* AB *é invertível se, e só se,* A *e* B *são ambas invertíveis.*

Corolário

Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $AB = I_n$ *então* A *e* B *são ambas invertíveis, tendo-se* $A^{-1} = B$ *e* $BA = I_n$.

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

1.62, 1.65, 1.66, 1.162, 1.163, 1.165