Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática

Programa

1. Matrizes
2. **Sistemas de Equações Lineares**
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

Sistemas de Equações Lineares

Definição

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Aos elementos $a_1, \ldots, a_n$ chamamos **coeficientes** da equação e a b o **termo independente** da equação.
Se $b = 0$ diz-se que a equação é linear **homogénea**.

O elemento $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação (1) se

$$a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = b.$$

Definição

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, \dots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

com $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Aos elementos $a_1, \dots, a_n$ chamamos **coeficientes** da equação e a b o **termo independente** da equação.
Se $b = 0$ diz-se que a equação é linear **homogénea**.

O elemento $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação (1) se

$$a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = b.$$

Definição

Uma **equação linear** nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

com $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Aos elementos $a_1, \ldots, a_n$ chamamos **coeficientes** da equação e a b o **termo independente** da equação.
Se $b = 0$ diz-se que a equação é linear **homogénea**.

O elemento $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma **solução** da equação (1) se

$$a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n = b.$$

Exemplos

1. *A equação linear*
$$ax + by = c,$$
com a, b *não são ambos nulos, define uma recta em* $\mathbb{R}^2$.
2. *A equação linear*
$$Ax + By + Cz = D,$$
em que A, B, C *não são todos nulos, define um plano em* $\mathbb{R}^3$.

Passemos a definir agora sistema de equações lineares:

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogénco**.

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogéneo**.

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogéneo**.

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogéneo**.

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$
(S) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & \cdots & & & & & \\
a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \right.
$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogéneo**.

Definição

Um **sistema de equações lineares** é uma conjunção de um número finito de equações lineares, todas nas mesmas incógnitas.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

com $m, n \in \mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Diz-se que (S) é um sistema de m equações lineares, nas n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

.

Se $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ diz-se que (S) é um **sistema homogéneo**.

Exemplos

1.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2.
$$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Exemplos

1. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

   É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2. $$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

   Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

   $$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

   É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Exemplos

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2.

$$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Exemplos

1. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

   É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2. $$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

   Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

   $$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

   É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Exemplos

1.
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

   É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2.
$$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

   Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

   É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Exemplos

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3.

2.

$$\begin{cases} x + \cos y - 2 + z = 0 \\ xy - 3z = 5 \\ x^2 = 3 \\ 3x + 4y - z \end{cases}$$

Não é um sistema de equações lineares.

3. *É um sistema de equações lineares?*

$$\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

É um sistema de 2 equações lineares nas 6 incógnitas,

Definição

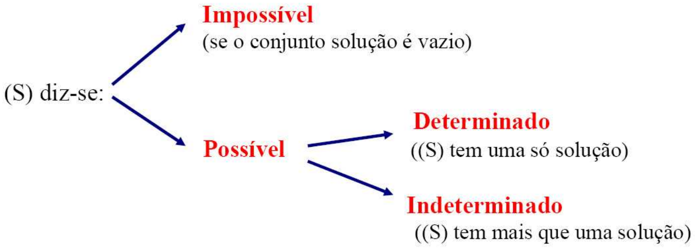
Um elemento $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ diz-se uma **solução** do sistema de n incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & & \\ a_{m1}x_1 & +a_{2m}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

se substituindo em cada equação equação do sitema as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ por $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, todas as equações se transformam numa proposição verdadeira.

O conjunto formado por todas as soluções de um sistema chama-se **conjunto-solução** do sistema.

Classificação de sistemas:



Exemplos

1. *Um sistema homegéneo*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

é sempre possível, pois $(0, 0, \ldots, 0)$ *é uma solução do sistema.*

Classificação de sistemas:

(S) diz-se:

Impossível
(se o conjunto solução é vazio)

Possível

Determinado
((S) tem uma só solução)

Indeterminado
((S) tem mais que uma solução)

Exemplos

1. *Um sistema homegéneo*

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

é sempre possível, pois $(0, 0, \ldots, 0)$ *é uma solução do sistema.*

2. Para o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 4x_2 & = & -4 \end{array}\right.,$$

$(0,1)$ e $(-4,3)$ são soluções, pois

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -4 & + & 2\times 1 & = & 2 \\ -2\times(0) & - & 4\times 1 & = & -4 \end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{rcrcr} -4 & + & 2\times 3 & = & 2 \\ -2\times(4) & - & 4\times 3 & = & -4 \end{array}\right..$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2 :\ \alpha_1 = 2-2\alpha_2\} \\ &= \{(2-2\alpha_2,\alpha_2) :\ \alpha_2\in\mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

constituí o conjunto de todas as soluções do sistema. O sistema é possível e indeterminado (aprenderemos de seguida a resolver o sistema).

O nosso objectivo neste capítulo é:

(1) **Discussão do sistema**: Indicar para um dado sistema se este é impossível ou possível e, no caso de ser possível, se é determinado ou indeterminado, sem determinar o conjunto de soluções.

(2) **Resolução do sistema**: Dado um sistema de equações lineares, determinar o conjunto das suas soluções (que será o conjunto vazio se o sistema for impossível).

Definição

Dado um sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

chamaremos **forma matricial** do sistema (S) a

$$(S) \qquad AX = B$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

1. $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é a **matriz simples** do sistema
2. $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é a **matriz das incógnitas**
3. $B \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$ é a **matriz dos termos independentes**.

Chama-se **matriz ampliada** do sistema

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

à matriz

$$[A \mid B] \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$$

cuja coluna i, $i = 1, \ldots, n$, é igual à coluna i de A e cuja coluna $n+1$ é igual à coluna (única) de B.

Observação

Note-se que

$$\mathrm{r}\left([A \mid B]\right) = \mathrm{r}(A) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{r}\left([A \mid B]\right) = \mathrm{r}(A) + 1$$

Chama-se **matriz ampliada** do sistema

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

à matriz

$$[A \mid B] \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$$

cuja coluna i, $i = 1, \ldots, n$, é igual à coluna i de A e cuja coluna $n+1$ é igual à coluna (única) de B.

Observação

Note-se que

$$\mathrm{r}\left([A \mid B]\right) = \mathrm{r}(A) \quad \textit{ou} \quad \mathrm{r}\left([A \mid B]\right) = \mathrm{r}(A) + 1$$

Exemplo

Para o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, *sobre* $\mathbb{R}$,

$$(S)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases},$$

tem-se a seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

A sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Exemplo

Para o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, *sobre* $\mathbb{R}$,

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array} \right. ,$$

tem-se a seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

A sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Exemplo

Para o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, *sobre* $\mathbb{R}$,

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}\right. ,$$

tem-se a seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}.$$

A sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Proposição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$*. Se* $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *é uma matriz* **invertível** *então os sistemas*

$$(S) \qquad AX = B \qquad e \qquad (S') \qquad (PA)X = PB$$

são equivalentes (isto é, têm o mesmo conjunto de soluções).

Exercício

Considere os sistemas

$$(S_1)\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \\ 2x+3y=2 \end{cases}, \quad (S_2)\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=0 \\ 2x+3y=1 \end{cases}, \quad (S_3)\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}.$$

1. *Discuta cada um dos sistemas* (S_1), (S_2) *e* (S_3).
2. *Resolva os sistemas possíveis.*

Resumo sobre a discussão de sistemas:

$AX = B$ com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$AX = B$
Sistema

- $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A \mid B])$
  Sistema Impossível
- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B])$
  Sistema Possível
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) = n$
    Sistema Possível Determinado
  - $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A \mid B]) < n$.
    Sistema Possível Indeterminado, com $\underline{\text{grau de indeterminação}}$ $n - \mathrm{r}(A)$