

Alguns exemplos resolvidos:

Exemplo 1

Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x \quad \quad + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{\ell_2 + (-2)\ell_1} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \\ \xrightarrow{\ell_3 - 3\ell_1} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \\ \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Alguns exemplos resolvidos:

Exemplo 1

Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x \quad \quad + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 + (-2)\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \\ & \xrightarrow{\ell_3 - 3\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \\ & \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

O sistema equivalente a que corresponde a última matriz ampliada é

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 1 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z. \end{cases} \quad \text{Obs : } \begin{array}{l} x, y \hookrightarrow \text{variáveis líderes} \\ z \hookrightarrow \text{variável Livre} \end{array}$$

$\therefore$ O sistema é possível e indeterminado, com um grau de indeterminação, e o conjunto-solução é

$$CS = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemplo 2

Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} y + 2z = \frac{5}{2} \\ 2x + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{2}{5}\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$(f.e.) \quad r(A) = r(A|B) = 3 = n$$

$$\xrightarrow{\ell_2 + \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

O sistema equivalente a que corresponde a última matriz ampliada é

$$\begin{cases} x & = & \frac{1}{2} \\ y & = & \frac{1}{2} \\ z & = & 1. \end{cases} \quad \text{Obs : } x, y, z \hookrightarrow \text{variáveis líderes}$$

∴ O sistema é possível e determinado e o conjunto-solução é

$$CS = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \right\}.$$

Exemplo 3 Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + z = 0 \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$(f.e.) \quad r(A) = 2 < r(A|B) = 3$$

Um sistema equivalente ao inicial é

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 1. \end{cases}$$

∴ O sistema é impossível e o conjunto solução é $\emptyset$.

Exemplo 3 Pretende-se discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + z = 0 \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 - \ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_3 - \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$(f.e.) \quad r(A) = 2 < r(A|B) = 3$$

Um sistema equivalente ao inicial é

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2y + z = 0 \\ 0 = 1. \end{cases}$$

$\therefore$ O sistema é impossível e o conjunto solução é $\emptyset$.

Definição

Um sistema de equações lineares $AX = B$ diz-se um **sistema de Cramer** se A é quadrada e invertível.

Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$(f.e.) \quad r(A) = r(A|B) = 2 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$\therefore$ O sistema é possível e determinado, $CS = \{(2, -2)\}$.

Definição

Um sistema de equações lineares $AX = B$ diz-se um **sistema de Cramer** se A é quadrada e invertível.

Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\ell_2 - 2\ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$(f.e.) \quad r(A) = r(A|B) = 2 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\ell_1 + \ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)\ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$\therefore$ O sistema é possível e determinado, $CS = \{(2, -2)\}$.

Outra forma seria:

Em (*) verificou-se que $r(A) = 2 = n$, logo A é invertível. Calculando a inversa de A obtém-se:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, colocando o sistema na forma matricial obtém-se

$$AX = B$$

e multiplicando em ambos os termos da igualdade por A^{-1} obtém-se

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow \underline{X = A^{-1}B}.$$

$X = A^{-1}B$ é assim a única solução do sistema.

Efectuando os cálculos

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},$$

logo $CS = \{(2, -2)\}$.

Observação

Os sistemas de Cramer são sempre possíveis e determinados com solução $X = A^{-1}B$.

Exercícios Propostos Para Trabalho do Aluno:

2.2, 2.4, 2.5(a), 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15, 2.24, 2.33

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2011/12

Departamento de Matemática



Programa

- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de Equações Lineares
- 3 **Determinantes**
- 4 Espaços Vectoriais
- 5 Aplicações Lineares
- 6 Valores e Vectores Próprios
- 7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
- 8 Geometria Analítica

Determinantes

3. Determinantes (só matrizes quadradas)

O determinante de uma matriz vai permitir, por exemplo:

- 1 Determinar se uma matriz quadrada é ou não invertível,
- 2 Resolver sistemas de Cramer,
- 3 calcular áreas de paralelogramos (em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$) e volumes de paralelepípedos (em $\mathbb{R}^3$),



4 ...

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que resulta de A se retirarmos a linha i e a coluna j .

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que resulta de A se retirarmos a linha i e a coluna j .

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que resulta de A se retirarmos a linha i e a coluna j .

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que resulta de A se retirarmos a linha i e a coluna j .

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

Sejam $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) e $i, j \in \{1, \dots, n\}$, denotamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que resulta de A se retirarmos a linha i e a coluna j .

Exemplo

Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, então

$$A(1|1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad A(3|1) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A , e representa-se por

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A|,$$

ao número

- Se $n = 1$, então

$$\det A = A_{11}.$$

- Se $n > 1$, então

$$\det A = A_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + \dots + A_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1|n),$$

ou seja, se $n > 1$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{1i}(-1)^{1+i} \det A(1|i).$$

Definição

Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A , e representa-se por

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A|,$$

ao número

- Se $n = 1$, então

$$\det A = A_{11}.$$

- Se $n > 1$, então

$$\det A = A_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + \dots + A_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1|n),$$

ou seja, se $n > 1$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{1i}(-1)^{1+i} \det A(1|i).$$

Definição

Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A , e representa-se por

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A|,$$

ao número

- Se $n = 1$, então

$$\det A = A_{11}.$$

- Se $n > 1$, então

$$\det A = A_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + \dots + A_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1|n),$$

ou seja, se $n > 1$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{1i}(-1)^{1+i} \det A(1|i).$$

Definição

Seja $A = [A_{ij}] \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A , e representa-se por

$$\det A \quad \text{ou} \quad |A|,$$

ao número

- Se $n = 1$, então

$$\det A = A_{11}.$$

- Se $n > 1$, então

$$\det A = A_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + \dots + A_{1n}(-1)^{1+n} \det A(1|n),$$

ou seja, se $n > 1$,

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{1i}(-1)^{1+i} \det A(1|i).$$

Exemplo

Se A for uma matriz de ordem 2, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

então,

$$\det A = A_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + A_{12}(-1)^{1+2} \det A(1|2).$$

Porque $A(1|1) = A_{22}$ e $A(1|2) = A_{21}$ vem que

$$\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}a_{21}.$$

Fórmula para cálculo do determinante de uma matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Se A for uma matriz de ordem 3, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{então,}$$

$\det A =$

$$A_{11}(-1)^{1+1} \det A(1|1) + A_{12}(-1)^{1+2} \det A(1|2) + A_{13}(-1)^{1+3} \det A(1|3)$$

$$= A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = \dots$$

Fórmula para cálculo do determinante de uma matriz 3×3

(Regra de Sarrus)

