Álgebra Linear e Geometria Analítica E

2013/2014

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

Pontos e referenciais em $\mathbb{R}^n$

Consideremos o conjunto $\mathbb{R}^n = \{A = (a_1, \cdots, a_n) | a_i \in \mathbb{R}\}$.
Aos elementos $A \in \mathbb{R}^n$ chamamos pontos.
Dados dois pontos $A = (a_1, \cdots, a_n)$, $B = (b_1, \cdots, b_n)$ podemos definir o vector do espaço vectorial $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, \cdots, b_n - a_n)$$

Fixemos um ponto $O \in \mathbb{R}^n$ e uma base $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Definição

Ao par $(O; e_1, \cdots, e_n)$ chama-se referencial de $\mathbb{R}^n$. Ao ponto O chama-se origem do referencial. Dado um ponto A, o vector $\overrightarrow{OA}$ chama-se vector posição do ponto A em relação a O. As coordenadas do ponto A são as coordenadas do vector posição $\overrightarrow{OA}$ em relação à base $(e_1, \cdots, e_n)$.

Pontos e referenciais em $\mathbb{R}^n$

Exemplos/Exercícios

Determine as coordenadas do ponto $P = (1, 2, 3)$ nos seguintes referenciais:

(a) $((0, 0, 0); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

(Chamamos a este referencial o referencial canónico de $\mathbb{R}^3$.)

(b) $((1, 0, 3); (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

(c) $((0, 0, 0); (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Solução: (a) $(1, 2, 3)$ (b) $(0, 2, 0)$ (c) $(1, 1, 1)$

Referencial canónico de $\mathbb{R}^n$:

$((0, \cdots, 0); (1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1))$

Se $A = (a_1, \cdots, a_n)$ ponto de $\mathbb{R}^n$ as suas coordenadas em relação ao referencial canónico são $A(a_1, \cdots, a_n)$.

7.1 Produto interno de vectores de $\mathbb{R}^3$

Fixamos em $\mathbb{R}^3$ um referencial.

Definição

Sejam A e B dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Designa-se por norma ou comprimento do vector $u = \overrightarrow{AB}$, e representa-se por $\|u\|$, o comprimento do segmento de recta $[AB]$. Um vector u diz-se unitário se $\|u\| = 1$.

Recorde que:

1. $\|u\| = 0$ se, e só se, $u = \overrightarrow{0}$.
2. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\|\alpha u\| = |\alpha|\,\|u\|$, em que $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$.

Definição

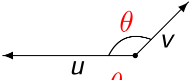
Sejam $u = \overrightarrow{OA}$ e $v = \overrightarrow{OB}$ dois vectores não nulos. Designa-se por ângulo formado pelos vectores u e v, e representa-se por $\measuredangle(u, v)$, o menor dos ângulos definido pela semi-recta com origem em O que passa pelo ponto A e pela semi-recta com origem em O que passa pelo ponto B.
Se $O = A$ ou $O = B$, isto é, se $u = \overrightarrow{0}$ ou $v = \overrightarrow{0}$, convenciona-se que $\measuredangle(u, v) = 0$.

Notemos que

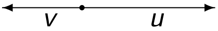
$$0 \leq \measuredangle(u, v) = \measuredangle(v, u) \leq \pi.$$

Exemplo

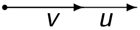
Seja $\theta = \measuredangle(u, v) = \measuredangle(v, u)$. *Tem-se*

1. 

$\theta = \pi$

2. 

$\theta = 0$

3. 

Definição

Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\theta = \measuredangle(u, v)$. Chamamos produto interno ou produto escalar dos vectores u e v ao número real

$$u \mid v = \|u\|\|v\| \cos\theta.$$

Definição

Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que u e v são perpendiculares, e escrevemos $u \perp v$, se

$$\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}.$$

Dizemos que u e v são ortogonais se

$$u \mid v = 0.$$

Sendo u e v vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\theta = \measuredangle(u, v)$, notemos que são equivalentes as afirmações:

1. $u \mid v = 0$.
2. $\|u\|\|v\| \cos\theta = 0$.
3. $\|u\| = 0 \quad \vee \quad \|v\| = 0 \quad \vee \quad \cos\theta = 0$.
4. $\|u\| = 0 \quad \vee \quad \|v\| = 0 \quad \vee \quad \theta = \frac{\pi}{2}$.
5. $\|u\| = 0 \quad \vee \quad \|v\| = 0 \quad \vee \quad u \perp v$.

Tem-se pois:

1. Se u e v são perpendiculares então u e v são ortogonais.
2. u e v podem ser ortogonais e não serem perpendiculares (basta que um deles seja o vector nulo).
3. Se u e v são ambos não nulos então u e v são ortogonais se, e só se, são perpendiculares.

Notemos que $u \mid v$ pode tomar qualquer valor real. Se u e v são não nulos então

$$u \mid v > 0 \quad \text{se, e só se,} \quad \cos\theta > 0$$

ou equivalentemente

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

e

$$u \mid v < 0 \quad \text{se, e só se,} \quad \cos\theta < 0$$

ou equivalentemente

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi.$$

Como

$$\begin{aligned} u \mid u &= \|u\| \|u\| \cos 0 \\ &= \|u\|^2 \end{aligned}$$

tem-se

$$\|u\| = \sqrt{u \mid u}.$$

Se $u = \overrightarrow{0}$ ou $v = \overrightarrow{0}$ então

$$\theta = \measuredangle(u, v) = 0.$$

Caso contrário, tem-se

$$\cos\theta = \frac{u \mid v}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{u \mid v}{\sqrt{u \mid u}\sqrt{v \mid v}}$$

e, portanto,

$$\theta = \arccos \frac{u \mid v}{\sqrt{u \mid u}\sqrt{v \mid v}}.$$

Proposição

Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

1. $u \mid v = v \mid u$.
2. $\alpha\,(u \mid v) = (\alpha u) \mid v = u \mid (\alpha v)$.
3. $(u+v) \mid w = u \mid w + v \mid w \quad$ e $\quad w \mid (u+v) = w \mid u + w \mid v$.

Dem. 1. Trivial

2. Consideremos a demonstração subdividida em 3 casos.

Caso 1: $\alpha = 0$.

Neste caso, tem-se

$$\alpha\,(u \mid v) = 0\,(u \mid v) = 0$$

$$(\alpha u) \mid v = \overrightarrow{0} \mid v = 0$$

$$u \mid (\alpha v) = u \mid \overrightarrow{0} = 0$$

e, portanto, $\alpha\,(u \mid v) = (\alpha u) \mid v = u \mid (\alpha v)$.

Caso 2: $\alpha > 0$.

Notemos que, neste caso,

$$\measuredangle(\alpha u, v) = \measuredangle(u, v) \quad \text{e} \quad \measuredangle(u, \alpha v) = \measuredangle(u, v).$$

Seja $\theta = \measuredangle(u, v)$. Tem-se

$$\alpha\,(u \mid v) = \alpha\,(\|u\|\,\|v\| \cos\theta) = \alpha\|u\|\,\|v\| \cos\theta,$$

$$(\alpha u) \mid v = \|\alpha u\|\|v\| \cos\theta = |\alpha|\ \|u\|\,\|v\| \cos\theta = \alpha\|u\|\,\|v\| \cos\theta,$$

e

$$u \mid (\alpha v) = \|u\|\,\|\alpha v\| \cos\theta = \|u\|\,(|\alpha|\,\|v\|) \cos\theta = \alpha\|u\|\,\|v\| \cos\theta$$

ficando pois demonstrado o que pretendíamos.

Caso 3: $\alpha < 0$.

Notemos que, neste caso,

$$\measuredangle(\alpha u, v) = \pi - \measuredangle(u, v) \quad \text{e} \quad \measuredangle(u, \alpha v) = \pi - \measuredangle(u, v).$$

Seja $\theta = \measuredangle(u, v)$.Tem-se

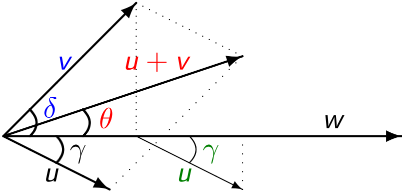
$$\alpha\,(u \mid v) = \alpha\|u\|\,\|v\|\cos\theta.$$

Como $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ tem-se

$$\begin{aligned}(\alpha u) \mid v &= \|\alpha u\|\,\|v\|\cos(\pi-\theta) & u \mid (\alpha v) &= \|u\|\,\|\alpha v\|\cos(\pi-\theta)\\ &= |\alpha|\,\|u\|\,\|v\|(-\cos\theta) & &= \|u\|\,|\alpha|\,\|v\|(-\cos\theta)\\ &= -\alpha\|u\|\,\|v\|(-\cos\theta) & &= \|u\|(-\alpha)\|v\|(-\cos\theta)\\ &= \alpha\|u\|\,\|v\|\cos\theta. & &= \alpha\|u\|\,\|v\|\cos\theta,\end{aligned}$$

estando assim demonstrado o que pretendíamos.

3. Para demonstrar que $(u+v) \mid w = u \mid w + v \mid w$ utilizaremos um argumento de ordem geométrica.



Notemos que $\|u+v\| \cos\theta = \|u\| \cos\gamma + \|v\| \cos\delta$
em que $\theta = \measuredangle(u+v, w)$, $\gamma = \measuredangle(u, w)$ e $\delta = \measuredangle(v, w)$.
Logo $\|u+v\| \, \|w\| \cos\theta = \|u\| \, \|w\| \cos\gamma + \|v\| \, \|w\| \cos\delta$
e, portanto, $(u+v) \mid w = u \mid w + v \mid w$.
A outra afirmação de 3. obtém-se facilmente da anterior e de 1., pois

$$w \mid (u+v) = (u+v) \mid w = u \mid w + v \mid w = w \mid u + w \mid v.$$

Definição

Sejam $u_1, \ldots, u_k$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $(u_1, \ldots, u_k)$ é uma sequência ortogonal se os vectores $u_1, \ldots, u_k$ são dois a dois ortogonais, isto é, se

$$u_i \mid u_j = 0, \qquad i, j \in \{1, \ldots, k\}, \quad i \neq j.$$

Proposição

Se $(u_1, \ldots, u_k)$ é uma sequência ortogonal de vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ então $(u_1, \ldots, u_k)$ é uma sequência linearmente independente e, portanto, $k \leq 3$.

Dem. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = \overrightarrow{0}$$

e demonstremos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.
Para qualquer $i \in \{1, \ldots, k\}$ tem-se

$$u_i \mid (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k) = u_i \mid \overrightarrow{0}$$

isto é,

$$u_i \mid (\alpha_1 u_1) + \cdots + u_i \mid (\alpha_k u_k) = 0$$

ou ainda

$$\alpha_1 (u_i \mid u_1) + \cdots + \alpha_k (u_i \mid u_k) = 0.$$

Como $u_i \mid u_j = 0$ para $i \neq j$, da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_i (u_i \mid u_i) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha_i \|u_i\|^2 = 0.$$

Como $u_1, \ldots, u_k$ são vectores não nulos, concluímos como pretendíamos que $\alpha_i = 0$. Logo $(u_1, \ldots, u_k)$ é uma sequência linearmente independente. Como qualquer base de $\mathbb{R}^3$ tem 3 vectores e é uma sequência geradora, concluímos que $k \leq 3$.

Definição

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$.

1. $\mathcal{B}$ diz-se uma base ortogonal se é uma sequência ortogonal de vectores.
2. $\mathcal{B}$ diz-se uma base ortonormada se for uma base ortogonal constituída por vectores unitários.

Proposição

Seja (e_1, e_2, e_3) uma base de $\mathbb{R}^3$. Tem-se, (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormada se, e só se,

$$e_i \mid e_j = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}, \quad com \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Dem. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Então, por ser ortogonal, concluímos que $e_i \mid e_j = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$.
Para $i = j$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$, tem-se $e_i \mid e_j = e_i \mid e_i = \|e_i\|^2$ e, como $\|e_i\| = 1$, concluímos que $e_i \mid e_j = 1 \quad \text{se} \quad i = j$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que (e_1, e_2, e_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$e_i \mid e_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}, \quad \text{com} \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

e demonstremos que (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormada.
Como, por hipótese, $e_i \mid e_j = 0$, para $i \neq j$, a base (e_1, e_2, e_3) é uma base ortogonal. Falta demonstrar que

$$\|e_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dado que

$$e_i \mid e_i = 1$$

concluímos que

$$\|e_i\|^2 = 1$$

e, portanto,

$$\|e_i\| = 1$$

conforme queríamos demonstrar.

Proposição

Seja (e_1, e_2, e_3) *uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Sejam* u *e* v *vectores de* $\mathbb{R}^3$ *com*

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

e

$$v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3.$$

Tem-se

$$u \mid v = \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \beta_j \, (e_i \mid e_j)$$

e se (e_1, e_2, e_3) *é uma base ortonormada então*

$$u \mid v = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

Dem. Utilizando as propriedades do produto interno, tem-se

$$
\begin{aligned}
u \mid v &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \mid (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) \\
&= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \mid (\beta_1 e_1) + (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \mid (\beta_2 e_2) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \mid (\beta_3 e_3) \\
&= (\alpha_1 e_1) \mid (\beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2) \mid (\beta_1 e_1) + (\alpha_3 e_3) \mid (\beta_1 e_1) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1) \mid (\beta_2 e_2) + (\alpha_2 e_2) \mid (\beta_2 e_2) + (\alpha_3 e_3) \mid (\beta_2 e_2) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1) \mid (\beta_3 e_3) + (\alpha_2 e_2) \mid (\beta_3 e_3) + (\alpha_3 e_3) \mid (\beta_3 e_3) \\
&= \alpha_1 \beta_1 (e_1 \mid e_1) + \alpha_2 \beta_1 (e_2 \mid e_1) + \alpha_3 \beta_1 (e_3 \mid e_1) + \\
&\quad \alpha_1 \beta_2 (e_1 \mid e_2) + \alpha_2 \beta_2 (e_2 \mid e_2) + \alpha_3 \beta_2 (e_3 \mid e_2) + \\
&\quad \alpha_1 \beta_3 (e_1 \mid e_3) + \alpha_2 \beta_3 (e_2 \mid e_3) + \alpha_3 \beta_3 (e_3 \mid e_3) .
\end{aligned}
$$

Logo

$$
u \mid v = \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_i \beta_j (e_i \mid e_j) . \qquad \text{Temos } e_i \mid e_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} ,
$$

se a base (e_1, e_2, e_3) é ortonormada.Nesse caso, a expressão anterior reduz-se a

$$
u \mid v = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 .
$$

Observação

Concluímos então que se (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ e

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \qquad \text{e} \qquad v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$

então

$$\|u\| = \sqrt{u \mid u} = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2}.$$

Nestas condições, e se u e v são vectores <u>não nulos</u> de $\mathbb{R}^3$ e $\theta = \measuredangle(u, v)$ então

$$\theta = \arccos \frac{u \mid v}{\|u\| \, \|v\|} = \arccos \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + {\alpha_3}^2}\ \sqrt{{\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 + {\beta_3}^2}}.$$

Exemplo

Seja (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Consideremos os vectores de $\mathbb{R}^3$

$$u = \alpha e_1 + 2e_2 - 5e_3 \qquad \text{e} \qquad v = 1e_1 + 3\alpha e_2 + 1e_3,$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.
Determinemos o conjunto $\mathcal{C}$ dos valores de α para os quais os vectores u e v são perpendiculares. Como u e v são ambos não nulos, então u e v são perpendiculares se, e só se, $u \mid v = 0$. Tem-se

$$u \mid v = \alpha \times 1 + 2 \times (3\alpha) + (-5) \times 1 = 7\alpha - 5.$$

Assim, u e v são perpendiculares se, e só se,

$$7\alpha - 5 = 0 \iff \alpha = \frac{5}{7}.$$

Logo, $\mathcal{C} = \left\{\frac{5}{7}\right\}$.

Exemplo

Determinemos, para $\alpha = 1$, o ângulo formado pelos vectores u e v.
Neste caso tem-se

$$u = e_1 + 2e_2 - 5e_3 \qquad \text{e} \qquad v = e_1 + 3e_2 + e_3.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\measuredangle(u, v) &= \arccos \frac{u \mid v}{\|u\| \|v\|} = \arccos \frac{1 \times 1 + 2 \times 3 + (-5) \times 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}\,\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} \\ &= \arccos \frac{2}{\sqrt{30}\,\sqrt{11}} = \arccos \frac{2}{\sqrt{330}}.\end{aligned}$$

Definição

Seja (e_1, e_2, e_3) uma base de $\mathbb{R}^3$ e b.c. a base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, a base $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$. Seja

$$P = \mathcal{M}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; (e_1, e_2, e_3), \text{b.c.}\right).$$

Dizemos que (e_1, e_2, e_3) é uma base directa de $\mathbb{R}^3$ se

$$\det P > 0.$$

Se $\det P < 0$ dizemos que (e_1, e_2, e_3) é uma base inversa de $\mathbb{R}^3$.

Observação

Se (e_1, e_2, e_3) é uma base directa (respectivamente, inversa) e se trocarmos a ordem de dois dos vectores então obtemos uma base inversa (respectivamente, directa). (Porquê?)

Exemplo

1. A base canónica de $\mathbb{R}^3$ é uma base directa pois
$$P = \mathcal{M}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \text{b.c.}, \text{b.c.}\right) = I_3$$
e
$$\det P = 1 > 0.$$

2. Seja $\mathcal{B} = \big((1,1,0),(0,-2,0),(0,0,3)\big)$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e determinemos se $\mathcal{B}$ é uma base directa ou inversa. Tem-se
$$P = \mathcal{M}\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \text{b.c.}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Como
$$\det P = 1 \times (-2) \times 3 = -6 < 0$$
a base $\mathcal{B}$ é inversa.

Definição

Sejam u e v dois vectores de $\mathbb{R}^3$. Designa-se por produto externo ou produto vectorial do vector u pelo vector v (por esta ordem), e representa-se por $u \times v$ ou por $u \wedge v$, o vector de $\mathbb{R}^3$ definido do seguinte modo:

1. Se u e v são linearmente dependentes então $u \times v = \overrightarrow{0}$.
2. Se u e v são linearmente independentes então $u \times v$ é $\underline{\underline{o}}$ vector perpendicular a u e perpendicular a v, com

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \measuredangle(u, v)$$

   e tal que $(u, v, u \times v)$ é uma base directa de $\mathbb{R}^3$.

No caso de u e v serem linearmente independentes existe um, e um só, vector de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições dadas em 2. Ainda neste caso, note que u e v são não nulos e, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, se tem $u \neq \alpha v$. Assim $0 < \theta < \pi$, $\operatorname{sen} \theta > 0$, $\|u\| \|v\| \operatorname{sen} \theta > 0$ e, portanto, $u \times v \neq \overrightarrow{0}$.

Definição

Sejam u, v e w três vectores de $\mathbb{R}^3$.Ao número real

$$(u \times v) \mid w$$

chamamos **produto misto** dos vectores u, v e w (por esta ordem).

Proposição

Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^3$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

1. $u \times v = -v \times u$.
2. $\alpha(u \times v) = (\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$.
3. $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$.
4. $w \times (u + v) = (w \times u) + (w \times v)$.

Dem. 1. Atendendo à definição de produto externo, se u e v são linearmente dependentes então $u \times v = \overrightarrow{0}$ e $v \times u = \overrightarrow{0}$ logo $u \times v = -v \times u$.
Se u e v são linearmente independentes então concluímos facilmente que $u \times v$ e $v \times u$ têm a mesma direcção, a mesma norma, mas sentidos contrários e, portanto, $u \times v = -v \times u$.
4. Consequência de 3. e 1. pois

$$\begin{aligned} w \times (u + v) &= -(u + v) \times w \\ &= -\left[(u \times w) + (v \times w)\right] \\ &= -\left[-(w \times u) + (-(w \times v))\right] \\ &= (w \times u) + (w \times v). \end{aligned}$$

Observação

Existem vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$$

e, portanto, o produto externo não é associativo.

Por exemplo, se $v = \alpha u$ e v e w são linearmente independentes tem-se

$$u \times v = u \times \alpha u = \overrightarrow{0} \qquad \text{e} \qquad (u \times v) \times w = \overrightarrow{0} \times w = \overrightarrow{0}.$$

Por outro lado, como $v \times w$ é perpendicular a v (e a w), concluímos que $v \times w$ é perpendicular a $\frac{1}{\alpha} v = u$. Logo u e $v \times w$ são linearmente independentes e, portanto,

$$u \times (v \times w) \neq \overrightarrow{0}.$$

Vejamos agora como obter o produto externo ou o produto misto de vectores quando conhecemos as suas coordenadas em relação a uma base ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$.

Seja (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada directa de $\mathbb{R}^3$. Determinemos, pela definição de produto externo, o vector

$$w = e_1 \times e_2.$$

Por definição, w é perpendicular a e_1 e a e_2, tal como e_3, e portanto tem a direcção de e_3. A sua norma será

$$\|w\| = \|e_1\| \|e_2\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

e, portanto,

$$\|w\| = \|e_3\|.$$

Logo $w = e_3$ ou $w = -e_3$. Como (e_1, e_2, w) tem que ser uma base directa e (e_1, e_2, e_3) é uma base directa concluímos que

$$e_1 \times e_2 = e_3.$$

Analogamente concluiríamos que

$$e_2 \times e_3 = e_1 \qquad \text{e} \qquad e_3 \times e_1 = e_2.$$

Obviamente que

$$\begin{aligned} e_2 \times e_1 &= -(e_1 \times e_2) = -e_3 \\ e_3 \times e_2 &= -e_1 \\ e_1 \times e_3 &= -e_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_1 \times e_1 &= \overrightarrow{0} \\ e_2 \times e_2 &= \overrightarrow{0} \\ e_3 \times e_3 &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Teorema

Seja (e_1, e_2, e_3) *uma base ortonormada directa de* $\mathbb{R}^3$ *e sejam*

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \quad e \quad w = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$$

vectores arbitrários de $\mathbb{R}^3$. *Tem-se*

1. $u \times v = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} e_3.$
2. $(u \times v) \mid w = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3 =$
$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$

É usual considerarmos o "determinante" $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$ que não tem significado matemático, mas que é utilizado como mnemónica para fixar a expressão de $u \times v$ em base ortonormada directa pois corresponde à utilização do Teorema de Laplace aplicado à linha 1.

Dem.
1.

$$
\begin{aligned}
u \times v &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \times (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) \\
&= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \times (\beta_1 e_1) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \times (\beta_2 e_2) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \times (\beta_3 e_3) \\
&= (\alpha_1 e_1) \times (\beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2) \times (\beta_1 e_1) + (\alpha_3 e_3) \times (\beta_1 e_1) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1) \times (\beta_2 e_2) + (\alpha_2 e_2) \times (\beta_2 e_2) + (\alpha_3 e_3) \times (\beta_2 e_2) + \\
&\quad (\alpha_1 e_1) \times (\beta_3 e_3) + (\alpha_2 e_2) \times (\beta_3 e_3) + (\alpha_3 e_3) \times (\beta_3 e_3) \\
&= \alpha_1 \beta_1 (e_1 \times e_1) + \alpha_2 \beta_1 (e_2 \times e_1) + \alpha_3 \beta_1 (e_3 \times e_1) + \\
&\quad \alpha_1 \beta_2 (e_1 \times e_2) + \alpha_2 \beta_2 (e_2 \times e_2) + \alpha_3 \beta_2 (e_3 \times e_2) + \\
&\quad \alpha_1 \beta_3 (e_1 \times e_3) + \alpha_2 \beta_3 (e_2 \times e_3) + \alpha_3 \beta_3 (e_3 \times e_3) \\
&= \alpha_2 \beta_1 (-e_3) + \alpha_3 \beta_1 e_2 + \alpha_1 \beta_2 e_3 + \alpha_3 \beta_2 (-e_1) + \alpha_1 \beta_3 (-e_2) + \alpha_2 \beta_3 e_1 \\
&= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) e_1 - (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) e_2 + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e_3 \\
&= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} e_3 .
\end{aligned}
$$

2. Atendendo à expressão do produto interno em base ortonormada e à expressão de $u \times v$ dado em 1. resulta de imediato que

$$(u\times v) \mid w = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3$$

$$\underset{l_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{=} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo

Seja (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada e directa de $\mathbb{R}^3$. Consideremos os vectores

$$u = e_1 + e_2 - 2e_3, \qquad v = 3e_1 - e_3 \qquad \text{e} \qquad w = e_2 + e_3.$$

(a) Determinemos $u \times v$.
Utilizando como mnemónica o desenvolvimento do "determinante" sem significado matemático

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

pelo Teorema de Laplace aplicado à linha 1, obtemos

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\ &= -e_1 - 5e_2 - 3e_3. \end{aligned}$$

(b) Determinemos um vector unitário perpendicular a u e a v e um vector perpendicular a u e a v com norma 5.
Por definição de produto externo, como u e v são linearmente independentes, $u \times v$ é um vector perpendicular a u e a v.
Tem-se

$$\|u \times v\| = \sqrt{(u \times v) \mid (u \times v)} = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}.$$

Como para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e qualquer vector z não nulo, de $\mathbb{R}^3$, o vector αz tem a direcção de z e $\|\alpha z\| = |\alpha| \, \|z\|$, basta considerar um vector

$$\alpha(u \times v)$$

com

$$|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{35}},$$

ou equivalentemente,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{35}} \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -\frac{1}{\sqrt{35}}.$$

Logo, o vector

$$w = \frac{1}{\sqrt{35}}(u \times v) = \frac{1}{\sqrt{35}}(-e_1 - 5e_2 - 3e_3)$$

é, ainda, perpendicular a u e a v e tem norma 1 tal como o vector

$$w' = -\frac{1}{\sqrt{35}}(u \times v) = -\frac{1}{\sqrt{35}}(-e_1 - 5e_2 - 3e_3).$$

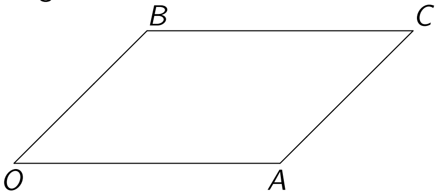
Se pretendermos um vector perpendicular a u e a v com norma 5, basta considerar o vector

$$z = 5w = \frac{5}{\sqrt{35}}(-e_1 - 5e_2 - 3e_3)$$

ou

$$z' = 5w' = -\frac{5}{\sqrt{35}}(-e_1 - 5e_2 - 3e_3).$$

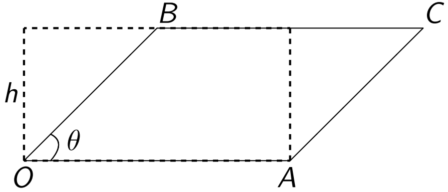
Consideremos um paralelogramo com vértices consecutivos O, A, C, B



e demonstremos que a sua área é igual a

$$\|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\|.$$

De facto, tal área é igual à área do rectângulo a tracejado



Temos

$$\begin{aligned} & \|\overrightarrow{OA}\| h \\ = & \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\| \operatorname{sen}\theta, \qquad \theta = \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}), \\ = & \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\|. \end{aligned}$$

A área do triângulo $[OAB]$ será

$$\frac{\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\|}{2}.$$

Recordemos:

Definição

Sejam u, v e w três vectores de $\mathbb{R}^3$.Ao número real

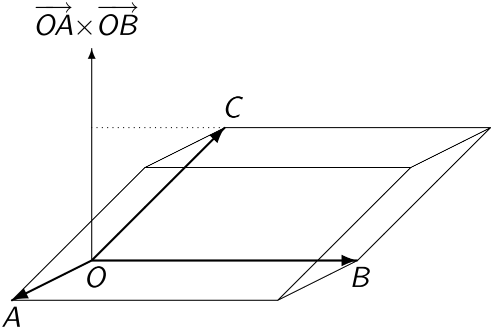
$$(u \times v) \mid w$$

chamamos produto misto dos vectores u, v e w (por esta ordem).

Sejam

$$u = \overrightarrow{OA}, \qquad v = \overrightarrow{OB} \qquad \text{e} \qquad w = \overrightarrow{OC}$$

vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Neste caso, u, v e w definem um paralelipípedo de volume não nulo.



O volume V desse paralelipípedo é o produto da área da sua base pela sua altura h.

Como a base é um paralelogramo, a sua área é

$$\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\|.$$

A altura do paralelipípedo será

$$h = \|\overrightarrow{OC}\| \ |\cos\theta|, \qquad \theta = \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}).$$

Notemos que consideramos $|\cos\theta|$ porque pode suceder que se tenha $\cos\theta \leq 0$. Por exemplo, se na figura acima considerarmos $u = \overrightarrow{OB}$ e $v = \overrightarrow{OA}$ o paralelipípedo seria o mesmo mas ter-se-ia $\cos\theta < 0$.
Assim,

$$\begin{aligned}
V &= \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \, h \\
&= \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| \ |\cos\theta|, \qquad \theta = \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\
&= \left| \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| \ \cos\theta \right|, \qquad \theta = \measuredangle(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \\
&= \left| \left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \mid \overrightarrow{OC} \right|.
\end{aligned}$$

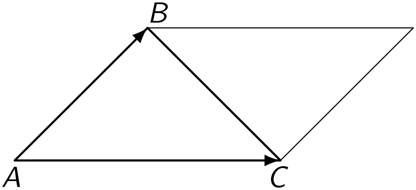
Exemplo

Consideremos o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ e os pontos

$$A = (0, k, -3), \qquad B = (-1, 0, -4) \qquad \text{e} \qquad C = (1, k, -3),$$

com $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determinemos o conjunto dos valores de k para os quais a área do triângulo de vértices A, B e C é 1.



Tem-se $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -k, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 0, 0)$. A área do paralelogramo é $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$ e a área do triângulo é $\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2}$.

Tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} -k & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} -1 & -k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} e_3 \\ &= -e_2 + ke_3\end{aligned}$$

e

$$\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + k^2} = \sqrt{1+k^2}.$$

Como queremos que

$$\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2} = 1,$$

isto é,

$$\frac{\sqrt{1+k^2}}{2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1+k^2 = 4.$$

Logo

$$k \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

Assim, o conjunto dos valores de k para os quais a área do triângulo é 1 é o conjunto $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

(b) Determinemos o conjunto dos valores de k para os quais o volume do paralelipípedo de arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ seja igual a 6.
Sabemos que o volume desse paralelipípedo é igual a

$$\left|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC}\right|.$$

Determinemos

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC}.$$

Tem-se $\overrightarrow{OA} = A - O = (0, k, -3)$, $\overrightarrow{OB} = B - O = (-1, 0, -4)$, $\overrightarrow{OC} = C - O = (1, k, -3)$ e

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 0 & k & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 1 & k & -3 \end{vmatrix} \underset{l_1 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & k & -3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{l_2 + l_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ 0 & k & -7 \\ 0 & k & -3 \end{vmatrix} \underset{l_3 + (-1)l_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & k & -3 \\ 0 & k & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4k.$$

Assim, são equivalentes as afirmações:

$$\left|(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC}\right| = 6$$

$$|-4k| = 6$$

$$\begin{array}{ccc} -4k = 6 & \vee & -4k = -6 \\ k = -\dfrac{3}{2} & \vee & k = \dfrac{3}{2}. \end{array}$$

Logo, o conjunto dos valores de k para os quais o volume do paralelipípedo é 6 é

$$\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}.$$

(c) Determinemos o conjunto $\mathcal{D}$ dos valores de k para os quais os pontos O, A, B e C estão todos num mesmo plano.
Observemos que tal equivale a afirmar que

$$(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \mid \overrightarrow{OC} = 0$$

isto é,

$$-4k = 0$$

e, portanto, o conjunto dos valores de k pretendido é

$$\mathcal{D} = \{0\}.$$