

Álgebra Linear e Geometria Analítica

2013/14

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de Equações Lineares
- 3 Determinantes
- 4 **Espaços Vectoriais**
- 5 Aplicações Lineares
- 6 Valores e Vectores Próprios
- 7 Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
- 8 Geometria Analítica

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Definição

Seja E um conjunto **não vazio** e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Suponhamos definidas duas operações:

- uma que designamos por **adição** em E que é uma operação binária:

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

- outra operação, que denominamos **multiplicação externa**:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\alpha, u) &\mapsto \alpha \cdot u \text{ (ou simplesmente } \alpha u) \end{aligned}$$

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Dizemos que E , com estas duas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ ou que $(E, +, \cdot)$ é um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$ se

① A adição tem as propriedades:

$$(A_1) \quad u + v = v + u.$$

$$(A_2) \quad (u + v) + w = u + (v + w).$$

$$(A_3) \quad \text{Existe } 0_E \in E \text{ tal que para qualquer } u \in E \text{ se tem } u + 0_E = 0_E + u = u.$$

$$(A_4) \quad \text{Para cada } u \in E \text{ existe } -u \in E \text{ tal que } u + (-u) = -u + u = 0_E \text{ para quaisquer } u, v, w \in E.$$

② A multiplicação externa goza das seguintes propriedades:

$$(M_1) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

$$(M_2) \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u.$$

$$(M_3) \quad (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u).$$

$$(M_4) \quad 1u = u,$$

para quaisquer $u, v \in E$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Definição

- aos elementos de E chamamos *vectores*
- aos elementos de $\mathbb{K}$ chamamos *escalares*
- se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que E é um *espaço vectorial complexo*
- se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que E é um *espaço vectorial real*

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Exemplo

- $\mathbb{K}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de elementos de $\mathbb{K}$.

Assim

$\mathbb{R}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$

e

$\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Note que

$\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$

mas

$\mathbb{R}$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. (Porquê?)

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Exemplo

- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, com a operação de adição usual de matrizes e com a operação de multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por uma matriz, definidas no Capítulo 1, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^n$, com a operação usual de adição de n -uplos, dada por

$$\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n \quad (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

e com a operação de multiplicação de um escalar por um n -uplo dada por

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad \alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n),$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo

- $\mathbb{K}_n[x]$, o conjunto de todos os *polinómios na variável x* , com coeficientes em $\mathbb{K}$, de grau menor ou igual a n , com $n \in \mathbb{N}_0$, isto é,

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}\}.$$

$\mathbb{K}_n[x]$ com as operação de adição usual de polinómios, dada por

$$\forall (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0), (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \in \mathbb{K}_n[x]$$

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

e com a multiplicação usual de um escalar por um polinómio, dada por

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \in \mathbb{K}_n[x]$$

$$\alpha \cdot (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (\alpha a_n) x^n + \cdots + (\alpha a_1) x + (\alpha a_0),$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

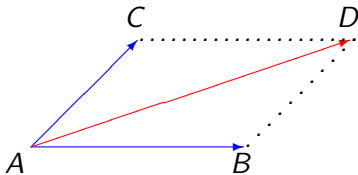
Exemplo

- $\mathbb{K}[x]$ - o conjunto de todos os polinómios na variável x , com coeficientes em $\mathbb{K}$ (sem restrição ao grau);
 $\mathbb{K}[x]$ com as operações usuais de adição de polinómios e de multiplicação de um escalar por um polinómio constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Exemplo

- $\mathcal{A}$ - o conjunto dos pontos do plano (ou do espaço).
 vector $\overrightarrow{AB}$ - o segmento orientado com origem no ponto A e extremidade final no ponto B (A e B de $\mathcal{A}$);
 V_A - o conjunto dos vectores aplicados com origem no ponto A .
 V_A com a adição dada pela regra do paralelogramo:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$



e multiplicação externa que a cada real α e a cada vector $\overrightarrow{AB}$ associa o vector $\alpha\overrightarrow{AB}$ cuja *direcção* é a do vector $\overrightarrow{AB}$, o *sentido* é o de $\overrightarrow{AB}$ se $\alpha > 0$ e é o contrário se $\alpha < 0$ (se $\alpha = 0$ então $\alpha\overrightarrow{AB} = \vec{0}$) e cujo *comprimento* é $\|\alpha\overrightarrow{AB}\| = |\alpha| \|\overrightarrow{AB}\|$
 é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ (isto é, um espaço vectorial real).

Proposição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in E$. Tem-se:

- ① O elemento neutro da adição em E é único (representa-se por 0_E);
- ② Para cada $u \in E$, o oposto de u , para a adição em E é único (o oposto para a adição de $u \in E$ representa-se por $-u$);
- ③ $\alpha 0_E = 0_E$;
- ④ $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$;
- ⑤ Se $\alpha u = 0_E$ então $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

4.2 Subespaços vectoriais

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto F de E diz-se um **subespaço vectorial** de E , ou simplesmente um **subespaço** de E , se F é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações nele naturalmente definidas por ser subconjunto de E (a que chamamos as **operações induzidas** pelas operações de E no conjunto F).

Teorema

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem-se que F é um subespaço de E se, e só se, satisfizer as condições seguintes:

- ① $F \subseteq E$
- ② $0_E \in F$ (ou $F \neq \emptyset$)
- ③ $\forall u, v \in F \quad u + v \in F$
- ④ $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in F \quad \alpha u \in F$

Exemplos

Consideremos o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Facilmente se verifica que são subespaços de $\mathbb{R}^2$:

- ① $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (eixo OX)
- ② $G = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ (eixo OY)
- ③ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ (bissetriz dos quadrantes ímpares)
- ④ $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}$ (bissetriz dos quadrantes pares)
- ⑤ Para cada $m \in \mathbb{R}$,
 $R_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\}$ (recta que passa na origem e tem declive m)

No entanto

- ① $R_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + b\}$, com $m, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$
 (recta, com declive m , que não passa na origem)
- ② $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$

não são subespaços de $\mathbb{R}^2$. (Porquê?)

Exemplos

Consideremos o espaço vectorial $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

São exemplos de subespaços de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$:

- 1 Triangulares superiores;
- 2 Triangulares inferiores;
- 3 Diagonais;
- 4 Escalares;
- 5 Simétricas;
- 6 Hemi-simétricas;
- 7 Com a diagonal principal nula.

Não são subespaços de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$:

- 1 Invertíveis;
- 2 Com a diagonal principal com pelo menos um elemento não nulo.

4.2 Subespaços vectoriais

Exemplos

Seja $\mathbb{K}[x]$ o conjunto dos polinómios, na variável x , com coeficientes em $\mathbb{K}$.

O conjunto dos polinómios de $\mathbb{K}[x]$ de grau *inferior ou igual* a r , com $r \in \mathbb{N}$, é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$.

O conjunto dos polinómios de $\mathbb{K}[x]$ de grau *igual* a r , com $r \in \mathbb{N}$, não é um subespaço de $\mathbb{K}[x]$.

Proposição (Subespaços triviais)

Se E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ então E e $\{0_E\}$ são subespaços vectoriais de E .

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ elementos de E . Dizemos que $v \in E$ é **combinação linear** dos vectores $u_1, \dots, u_r$ se existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ (não necessariamente únicos) tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r.$$

Aos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ chamamos os **coeficientes** da combinação linear e a $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ a **sequência dos coeficientes** da combinação linear.

Exemplo

- ① 0_E é combinação linear de quaisquer vectores $u_1, \dots, u_r$ de um espaço vectorial E pois

$$0_E = 0 u_1 + \dots + 0 u_r.$$

Exemplos

- ① *Qualquer vector de $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ pois*

$$\forall_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \quad (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

- ② *Mais geralmente, qualquer vector de $\mathbb{K}^n$ é combinação linear dos vectores*

$$e_1, \dots, e_n$$

em que $e_i, i = 1, \dots, n$, é o n -uplo com todas as componentes iguais a 0, excepto a i -ésima componente que é igual a 1, i. e.,

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Exemplo

- ① Em $\mathbb{R}^2$ o vector $(3, 3)$ é combinação linear dos vectores $(1, 1)$, $(2, 2)$.
Os coeficientes da combinação linear *não* são únicos pois

$$(3, 3) = 3(1, 1) + 0(2, 2),$$

$$(3, 3) = 1(1, 1) + 1(2, 2),$$

$$(3, 3) = 7(1, 1) + (-2)(2, 2).$$

De facto, é suficiente que em $(3, 3) = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(2, 2)$ se tenha

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3.$$

Proposição

Seja E um espaço vectorial e $u_1, \dots, u_r$ elementos de E . O conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \dots, u_r$, isto é,

$$\{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}\},$$

é um *subespaço* de E .

Definição

Sejam $u_1, \dots, u_r$ elementos de um espaço vectorial E . Chamamos *subespaço* (de E) *gerado* pela sequência $(u_1, \dots, u_r)$ ou pelos vectores $u_1, \dots, u_r$ ao conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \dots, u_r$. Tal subespaço é frequentemente denotado por $\langle u_1, \dots, u_r \rangle$, isto é,

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r : \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

Se $F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ dizemos, ainda, que $u_1, \dots, u_r$ *geram* F ou que $u_1, \dots, u_r$ são *geradores* de F ou que a sequência $(u_1, \dots, u_r)$ é geradora de F .

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Exemplos

- ❶ *Quaisquer que sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de um espaço vectorial E tem-se*

$$0_E \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$$

e, para $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$u_i \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle.$$

- ❷ $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.
- ❸ $\mathbb{K}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ sendo $e_i \in \mathbb{K}^n$ o n -uplo com todas as componentes nulas excepto a i -ésima componente que é igual a 1, $i = 1, \dots, n$.

Exemplos

- 1 $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn} \rangle$
em que E_{ij} é a matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas excepto a entrada (i, j) que é igual a 1, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.
- 2 $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b + c\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
Observemos que

$$F = \{(2b + c, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$$

e que

$$(2b + c, b, c) = b(2, 1, 0) + c(1, 0, 1)$$

donde

$$F = \langle (2, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

Exemplos

① $\mathbb{K}_n[x] = \langle x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1 \rangle$ pois

$$\forall a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}_n[x] \quad a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0 \cdot 1.$$

② Em $\mathbb{R}^2$, considerem-se os vectores

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 3), (-3, 4).$$

Tem-se

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1, 0), (0, 1), (-1, 3), (-3, 4) \rangle$$

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1, 0), (0, 1), (-1, 3) \rangle$$

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$$

$$\langle (1, 0) \rangle = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2.$$

Definição

Um espaço vectorial E diz-se *finitamente gerado* se existem $r \in \mathbb{N}$ e $u_1, \dots, u_r \in E$ tais que

$$E = \langle u_1, \dots, u_r \rangle.$$

Exemplos

- de espaços finitamente gerados: $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K}_n[x], V_A$;
- $\mathbb{K}[x]$ (o conjunto dos polinómios, na variável x , com coeficientes em $\mathbb{K}$, sem restrição ao grau) *não* é de dimensão finita.
Porquê?: se $\mathbb{K}[x]$ tivesse dimensão finita

$$\exists_{r \in \mathbb{N}} \exists_{p_1(x), \dots, p_r(x) \in \mathbb{K}[x]} \quad \mathbb{K}[x] = \langle p_1(x), \dots, p_r(x) \rangle.$$

Seja k o máximo grau dos polinómios $p_1(x), \dots, p_r(x)$.

Qualquer polinómio com grau superior a k *não* se pode escrever como combinação linear dos polinómios $p_1(x), \dots, p_r(x)$ e, portanto,

$$\langle p_1(x), \dots, p_r(x) \rangle \subsetneq \mathbb{K}[x] \quad (\text{contradição}).$$

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r$ e $v_1, \dots, v_s$ vectores de E .
Tem-se

- ① $\langle u_1, \dots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_s \rangle$
se, e só se, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \dots, v_s$.
- ② $\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$
se, e só se, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \dots, v_s$ e para todo $j \in \{1, \dots, s\}$, v_j é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$.

Proposição

Se $u_1, \dots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que u_i é combinação linear dos restantes $r - 1$ vectores então

$$\langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_r \rangle = \langle u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_r \rangle.$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Se uma sequência de vectores de E inclui o vector 0_E , tal vector pode ser “eliminado” da sequência que o subespaço gerado por esses vectores não se altera.

Proposição

Seja $S = (u_1, \dots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E e seja $S' = (u'_1, \dots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos seguintes tipos:

- (I) Troca de ordem na sequência dos vectores u_i e u_j , com $i \neq j$.*
- (II) Multiplicação do vector u_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*
- (III) Substituição do vector u_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, por $u_i + \beta u_j$, com $j \in \{1, \dots, r\}$, $j \neq i$ e $\beta \in \mathbb{K}$.*

Então

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \langle u'_1, \dots, u'_r \rangle.$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Observação

De acordo com o resultado anterior, se tivermos m vectores de $\mathbb{K}^n$ e os tomarmos como linhas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, podemos efectuar na matriz quaisquer transformações elementares sobre linhas, em número finito, que o subespaço (de $\mathbb{K}^n$) gerado pelas linhas não se altera, isto é, se

$$A \xrightarrow{(linhas)} A'$$

então o subespaço gerado pelas linhas da matriz A é igual ao subespaço gerado pelas linhas da matriz A' .

Em particular, podemos transformar A numa matriz A' em forma de escada e garantir que as linhas não nulas de A' geram o mesmo subespaço de $\mathbb{K}^n$ que as linhas da matriz A .

4.4 Dependência e independência linear

Definição

Seja E um espaço vectorial. Sejam $u_1, \dots, u_r \in E$, com $r \in \mathbb{N}$.

- Para $r = 1$, dizemos que a sequência (u_1) ou que o vector u_1 é **linearmente dependente** quando $u_1 = 0_E$.
- Para $r \geq 2$ dizemos que $(u_1, \dots, u_r)$ é uma sequência **linearmente dependente**, ou que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes, quando pelo menos um dos vectores da sequência é combinação linear dos restantes vectores.

A uma sequência $(u_1, \dots, u_r)$ que não é linearmente dependente chamamos **linearmente independente** e dizemos que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes.

4.4 Dependência e independência linear

*Nota: Dois vectores são linearmente dependentes se, e só se, um dos vectores é **múltiplo escalar** do outro, isto é, se é igual ao produto de um escalar pelo outro vector.*

Teorema (Critério de Independência Linear)

*Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E . Os vectores $u_1, \dots, u_r$ são **linearmente independentes** se, e só se, a única forma de escrever 0_E como combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$ é tomando todos os coeficientes da combinação linear iguais a zero, isto é, se, e só se,*

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0_E \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

*Tal equivale a afirmar que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são **linearmente dependentes** se, e só se, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ **não todos nulos** tais que*

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Exemplos

- ❶ Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ é linearmente independente.
- ❷ Em $\mathbb{K}^n$, a sequência $(e_1, \dots, e_n)$ é linearmente independente.
- ❸ Em $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, a sequência $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn})$ é linearmente independente.
- ❹ No espaço vectorial $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 2b + c\}$, a sequência $((2, 1, 0), (1, 0, 1))$ é linearmente independente.
- ❺ Em $\mathbb{K}_n[x]$, a sequência $(x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$ é linearmente independente.
- ❻ Em $\mathbb{R}^2$,
 - $((1, 0), (0, 1), (-1, 3), (-3, 4))$ é uma sequência linearmente dependente.
 - $((1, 0), (0, 1), (-1, 3))$ é uma sequência linearmente dependente.
 - $((1, 0), (0, 1))$ é uma sequência linearmente independente.
 - $((1, 0))$ é uma sequência linearmente independente.

4.4 Dependência e independência linear

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E . Os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se, para todo o vector que se possa escrever como combinação linear de $u_1, \dots, u_r$ (isto é, vector de $\langle u_1, \dots, u_r \rangle$) os coeficientes da combinação linear são únicos.

Proposição

Seja $S = (u_1, \dots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E e seja $S' = (u'_1, \dots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos tipos (I), (II), (III) descritos anteriormente.

Tem-se, S é linearmente dependente (respectivamente, independente) se, e só se, S' é linearmente dependente (respectivamente, independente).

4.4 Dependência e independência linear

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E linearmente independentes. Se $v \in E$ é tal que v não é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$, então

$u_1, \dots, u_r, v$ são linearmente independentes

e

$$\langle u_1, \dots, u_r \rangle \subsetneq \langle u_1, \dots, u_r, v \rangle.$$

4.5 Bases e dimensão

Definição

Seja E um espaço vectorial e $(u_1, \dots, u_n)$ uma sequência de vectores de E . Dizemos que $(u_1, \dots, u_n)$ é uma **base** de E se é uma sequência geradora de E e linearmente independente.

Convenciona-se que se $E = \{0_E\}$ então o **conjunto vazio** é base de E .

Observação

Em $\mathbb{R}^2$, tem-se:

$((1, 0), (0, 1))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ e é linearmente independente.

$((1, 0), (0, 1), (-1, 3))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ mas não é linearmente independente.

$((1, 1), (2, 2))$ não é geradora de $\mathbb{R}^2$ e não é linearmente independente.

$((1, 1))$ não é geradora de $\mathbb{R}^2$ mas é linearmente independente.

Proposição

Num espaço vectorial E finitamente gerado qualquer sequência geradora de E tem um número de vectores superior ou igual ao número de vectores de qualquer sequência linearmente independente.

Proposição

Se um espaço vectorial E admite uma base com n elementos então todas as bases de E têm n elementos.

Definição

Seja E um espaço vectorial que admite uma base com n elementos, $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que E tem **dimensão** n e escrevemos $\dim E = n$.

Observação

Como convençionámos que o conjunto vazio é base de $E = \{0_E\}$ então, neste caso, $\dim E = 0$.

Um espaço vectorial que como $K[x]$ não é finitamente gerado diz-se de **dimensão infinita**.

Exemplos

- ① $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- ② $\dim \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$.
- ③ $\dim \mathbb{K}_n[x] = n + 1$.
- ④ Se $\mathcal{D}$ é o conjunto das matrizes diagonais de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então $\dim \mathcal{D} = n$.
- ⑤ Se $\mathcal{T}$ é o conjunto das matrizes triangulares superiores de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ então

$$\dim \mathcal{T} = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

- ⑥ $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, mas também é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. No primeiro caso, a sua dimensão é 1 e no segundo caso é 2. (Porquê?) Escrevemos então

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Proposição

Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as afirmações:

- 1 $\dim E = n$.
- 2 *Existe uma sequência geradora, com n vectores de E , e qualquer sequência geradora de vectores de E tem, no mínimo, n elementos.*
- 3 *Existe uma sequência linearmente independente, com n vectores de E , e qualquer sequência linearmente independente de vectores de E tem, no máximo, n elementos.*

Proposição

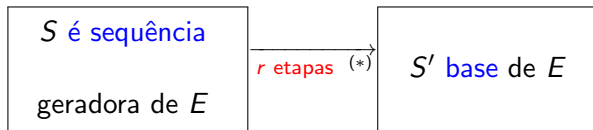
Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as afirmações:

- 1 $\dim E = n$.
- 2 *Qualquer sequência geradora de E , com n vectores, é uma base de E .*
- 3 *Qualquer sequência linearmente independente, com n vectores de E , é uma base de E .*

Proposição

Se $S = (v_1, \dots, v_s)$ é uma sequência geradora de um espaço vectorial E então existe uma subsequência de S que é uma base de E

Esquemáticamente temos:



(*) Em cada uma das r etapas “elimina-se” um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

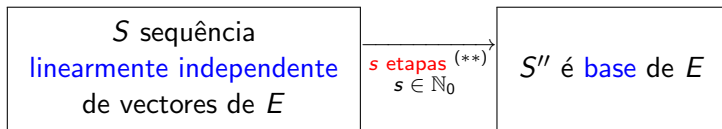
Teorema do Completamento

Se $S = (u_1, \dots, u_r)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial E de dimensão n então existe uma base de E que tem S como subsequência. Ou seja, existem vectores $w_1, \dots, w_{n-r}$ de E , com $n - r \geq 0$, tais que

$$(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_{n-r})$$

é uma base de E .

Esquemáticamente tem-se:



(**) Em cada uma das s etapas “acrescenta-se” um vector à sequência que não seja combinação linear dos restantes.

Proposição

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Tem-se:

- 1 Se F é um subespaço de E então $\dim F \leq \dim E$.
- 2 Se F é um subespaço de E e $\dim F = \dim E$ então $F = E$.

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \dots, u_n$ vectores de E . Tem-se, $(u_1, \dots, u_n)$ é uma base de E se, e só se, todo o vector de E é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_n$ e são únicos os coeficientes da combinação linear

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $(u_1, \dots, u_n)$ uma base de E . Para cada $v \in E$ os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, **únicos**, tais que $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ dizem-se as **coordenadas** de v na base $(u_1, \dots, u_n)$ ou, mais correctamente, dizemos que $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a **sequência das coordenadas** de v na base $(u_1, \dots, u_n)$.

Exemplo

- ❶ $((1, 0), (0, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ então, como

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

a sequência das coordenadas de (a, b) na base anterior é (a, b) .

- ❷ $((0, 1), (1, 0))$ é também uma base de $\mathbb{R}^2$. Em relação a essa base, como

$$(a, b) = b(0, 1) + a(1, 0),$$

a sequência das coordenadas de (a, b) é (b, a) .

- ❸ $\mathcal{B} = ((-1, 1), (0, 1))$ é também uma base de $\mathbb{R}^2$. Determinemos a sequência das coordenadas de (a, b) em relação a essa base.

$$(a, b) = \alpha_1(-1, 1) + \alpha_2(0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -a \\ \alpha_2 = a + b \end{cases}.$$

Assim a sequência das coordenadas do vector (a, b) na base

$\mathcal{B} = ((-1, 1), (0, 1))$ é $(-a, a + b)$.

Exemplo

- ❶ O vector que em relação à base

$$\mathcal{B} = \left((-1, 2, 3), (0, 3, 4), (0, 0, 5) \right)$$

de $\mathbb{R}^3$ tem a sequência de coordenadas $(7, -1, 4)$ é o vector

$$\begin{aligned} & 7(-1, 2, 3) + (-1)(0, 3, 4) + 4(0, 0, 5) = \\ & = (-7, 14, 21) + (0, -3, -4) + (0, 0, 20) \\ & = (-7, 11, 37). \end{aligned}$$

Definição

Designamos por **base canónica** de $\mathbb{K}^n$, e representamos por **b.c.** $\mathbb{K}^n$, a base $(e_1, \dots, e_n)$ sendo e_i , $i = 1, \dots, n$, o n -uplo com todas as componentes nulas excepto a i -ésima componente que é igual a 1.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Teorema

Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E então $F \cap G$ é, ainda, um subespaço de E .

Exemplo

Em $\mathbb{R}^4$ consideremos os subespaços

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0 \wedge a - b - d = 0\}$$

$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - c = 0 \wedge d = 0\}$$

Sabemos então que

$$F \cap G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0 \wedge a - b - d = 0 \wedge b - c = 0 \wedge d = 0\}$$

e, portanto,

$$F \cap G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c \wedge b = c \wedge d = 0\} = \{(c, c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\} =$$

$$\{c(1, 1, 1, 0) : c \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1, 0) \rangle.$$

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Processo para a determinação da intersecção de dois subespaços:

- 1 Obter um sistema (S_1) (resp. (S_2)) de equações lineares cujo conjunto de soluções é F (resp. G).
- 2 Considerar um sistema (S) constituído por todas as equações de (S_1) e por todas as equações de (S_2) .
- 3 O conjunto das soluções do sistema (S) é $F \cap G$.

Proposição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . Tem-se $F \cup G$ é um subespaço de E se, e só se, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Definição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . Chamamos **soma** dos subespaços F e G ao conjunto

$$F + G = \{u + v : u \in F \wedge v \in G\}.$$

Proposição

A soma de dois subespaços de um espaço vectorial E é ainda um subespaço de E .

Exemplo

Sejam $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

Tem-se $F \cup G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\}$.

Assim, por exemplo, $(2, 3) \notin (F \cup G)$ e, portanto, $F \cup G \subsetneq \mathbb{R}^2$.

Mas $F + G = \mathbb{R}^2$, pois com $(x, 0) \in F$ e $(0, y) \in G$ temos

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Seja E um espaço vectorial e F e G subespaços de E tais que

$$F = \langle u_1, \dots, u_r \rangle \quad e \quad G = \langle v_1, \dots, v_s \rangle.$$

Tem-se

$$F + G = \langle u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s \rangle.$$

Exemplo

Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2z\}$ e $G = \langle (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle$.

Temos que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2z\} =$

$\{(y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Como para quaisquer $y, z \in \mathbb{R}$ se tem

$(y + 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$, concluímos que

$$F = \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle.$$

Dado que $G = \langle (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle$ pela proposição anterior temos

$$F + G = \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle.$$

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E . São equivalentes as afirmações:

- ❶ *Se $(u_1, \dots, u_n)$ é uma base de F e $(v_1, \dots, v_s)$ é uma base de G então $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_s)$ é uma base de $F + G$.*
- ❷ *$F \cap G = \{0_E\}$.*
- ❸ *Se $u, u' \in F$ e $v, v' \in G$ são tais que $u + v = u' + v'$ então $u = u'$ e $v = v'$.*

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Definição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . Dizemos que E é a **soma directa** dos subespaços F e G e escrevemos

$$E = F \oplus G$$

se para cada $w \in E$ existe um único par (u, v) com $u \in F$ e $v \in G$ tal que $w = u + v$. Nestas condições dizemos que F (resp. G) é um **subespaço suplementar** de F (resp. G) em E . Dizemos ainda que o vector u é a **projectção** de w sobre F , segundo G e que o vector v é a projectção de w sobre G , segundo F .

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E . São equivalentes as afirmações:

- ① $E = F \oplus G$.
- ② $E = F + G$ e $F \cap G = \{0_E\}$.

Proposição

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Se F é um subespaço de E então existe um subespaço G de E tal que

$$E = F \oplus G,$$

isto é, todo o subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita tem um suplementar.

4.7 O Teorema das Dimensões

Proposição

Teorema das Dimensões

Se E é um espaço vectorial e F e G são subespaços de E de dimensão finita então $F + G$ e $F \cap G$ também têm dimensão finita e

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Observação

Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E são equivalentes as afirmações:

- ① $F \cap G = \{0_E\}$,
- ② $\dim(F \cap G) = 0$,
- ③ $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

4.8 Matrizes e Espaços Vectoriais

Nesta secção veremos como utilizar as matrizes para resolver os seguintes problemas:

- 1 Determinar se uma sequência de vectores de E é linearmente independente.
- 2 Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.
- 3 Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.
- 4 Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.
- 5 Verificar se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

4.8 Matrizes e Espaços Vectoriais

Recordemos que se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e

$$A \xrightarrow{(linhas)} B$$

então o subespaço gerado pelas linhas da matriz A é igual ao subespaço gerado pelas linhas da matriz B e que as linhas de A são linearmente independentes se, e só se, o mesmo suceder às linhas de B .

Proposição

As linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes.

4.8 Matrizes e Espaços Vectoriais

Vejamos como, utilizando matrizes, respondemos facilmente aos problemas anteriormente enunciados no caso do espaço vectorial $\mathbb{K}^n$.

Seja F um subespaço de $\mathbb{K}^n$ e $S = (u_1, \dots, u_p)$ uma sequência de vectores de F tais que $F = \langle u_1, \dots, u_p \rangle$.

Seja $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$ a matriz cuja linha i é u_i , $i = 1, \dots, p$ e seja A' a matriz em forma de escada equivalente por linhas a A .

Sem exigências de rigor escrevemos $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$ para representar a matriz cuja linha i é u_i , $i = 1, \dots, p$.

1. Determinar se uma sequência de vectores de E é linearmente independente.

1. A sequência S é linearmente independente se, e só se, A' não tem linhas nulas, ou seja, $r\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}\right) = p$.

Exemplo

Considere-se a sequência de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$S = ((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3)).$$

Tal sequência é linearmente independente se, e só se, $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3$.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

concluimos que S é linearmente independente.

2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.

2. Determinar se um vector v pertence ao subespaço F de $\mathbb{K}^n$ é equivalente a averiguar se v é combinação linear dos vectores da sequência S , geradora de F .

$$\text{Isto é } r \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \right) = r \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ v \end{bmatrix} \right).$$

Exemplo

Seja $F = \langle (1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3) \rangle$.

Como vimos no exemplo anterior, a sequência

$((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3))$ é linearmente independente e, portanto,

$$\text{Base de } F = \left((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3) \right).$$

Determinemos se $(1, 4, -2, -3) \in F$, utilizando matrizes.

2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.

Note que

$$(1, 4, -2, -3) \in F$$

se, só se, $(1, 4, -2, -3)$ se pode escrever como combinação linear dos vectores

$$(1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3)$$

ou equivalentemente, se, e só se, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

têm a mesma característica.

2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.

Vimos no exemplo anterior que $r(A) = 3$ e, como

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 + (-1)l_1]{l_3 + (-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{l_3 + (-1)l_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.),$$

concluimos que $r(C) = 3$ e, portanto,

$$(1, 4, -2, -3) \in F.$$

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

3.a Uma base de F é constituída pelas linhas não nulas de A' , isto é, se

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}), \quad (u'_1, \dots, u'_s) \text{ é uma base de } F.$$

Exemplo

Consideremos o subespaço de $\mathbb{R}^3$ $G = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 4), (2, -1, 4) \rangle$ e determinemos uma base de G .

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-1)l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}).$$

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

Logo,

$$G = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 4) \rangle.$$

Como a sequência

$$\left((1, -1, 0), (0, 1, 4) \right)$$

é geradora de G e é linearmente independente (note que os elementos da sequência são as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada) então tal sequência é uma **base** de G , tendo-se $\dim G = 2$.

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

3. b As linhas não nulas de A' são uma base de F . Tendo em consideração as eventuais trocas efectuadas para obter A' a partir de A , determinamos facilmente uma subsequência de S que é uma base de F .

Exemplo

Se $G = \langle (1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 5, 2) \rangle$ então Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 + (-2)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.}).$$

Analogamente ao exemplo anterior, uma base de G é $((1, 2, -1), (0, 3, 3))$ mas também, tendo em atenção as trocas efectuadas, uma base de G é

$$((1, 2, -1), (1, 5, 2)).$$

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

Exemplo

Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2z\}$ e

$G = \langle (1, 0, -1), (2, 0, 4), (0, 3, 1) \rangle$. Vimos anteriormente que

$F + G = \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 0, -1), (2, 0, 4), (0, 3, 1) \rangle$.

Para obter uma base de $F + G$ procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_2 + (-2)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1 \\ l_4 + (-2)l_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \xrightarrow{\substack{l_3 + (-2)l_2 \\ l_4 + (-2)l_2 \\ l_5 + 3l_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_4 + (-2)l_3 \\ l_5 + (\frac{2}{3})l_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo, uma base de $F + G$ é

$((1, 1, 0), (0, -1, -1), (0, 0, 3))$ e também $((1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 0, -1))$.

4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

4. Seja $S' = (u_1, \dots, u_p)$ uma sequência linearmente independente de vectores de em subespaço F de $\mathbb{K}^n$ e seja s a dimensão de F . Seja $S' = (w_1, \dots, w_s)$ uma base de F . Se $p < s$, obtemos uma base de F "acrescentando" $s - p$ vectores a S' , com a restrição de tais vectores pertencerem a F e a nova sequência ser linearmente independente.

Ou seja, se

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_s \end{bmatrix} = W' \quad (\text{f.e.})$$

e

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_p \end{bmatrix} = U' \quad (\text{f.e.})$$

então considerem-se as $s - p$ linhas de W' , $(w'_{i1}, \dots, w'_{is-p})$ com pivôs em índice de coluna distintos dos da matriz U' . Nestas condições a sequência $(u'_1, \dots, u'_p, w'_{i1}, \dots, w'_{is-p})$ é uma base de F .

Também é base de F a sequência $(u_1, \dots, u_p, w'_{i1}, \dots, w'_{is-p})$.

4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Exemplo

Considere-se a sequência de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$S = \left((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3) \right).$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 + (-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \longleftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

concluimos que S é linearmente independente.

4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Se acrescentarmos à sequência S , por exemplo, o vector $(0, 1, 0, 0)$ obtemos ainda uma sequência linearmente independente. Basta atender a que se tem

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (f.e.)$$

e $r(B) = 4$.

*Como a sequência $((1, 4, 3, 6), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -5, 9), (0, 0, 0, 2))$ é linearmente independente e tem $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vectores é uma **base** de $\mathbb{R}^4$. É também base de F $((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3), (0, 1, 0, 0))$.*

5. Verificar se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

5. Sejam $(u_1, \dots, u_p)$ e $(v_1, \dots, v_q)$ sequências de vectores de $\mathbb{K}^n$. Se

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} U'' \quad (\text{f.e.r.})$$

, e

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix} \xrightarrow{(linhas)} V'' \quad (\text{f.e.r.})$$

então $\langle u_1, \dots, u_p \rangle = \langle v_1, \dots, v_q \rangle$ se, e só se são iguais as linhas não nulas das matrizes U'' e V'' .

Exemplo

Determinemos se as sequências

$((1, -1, 0), (0, 1, 4), (2, -1, 4)), ((1, 0, 4), (3, -2, 4))$ e $((1, -1, 0), (0, 1, 1))$ geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Atendendo a que

5. Verificar se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - 2l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.),$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 - 3l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{2}l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.)$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 + l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (f.e.r.),$$

concluimos que

$$\langle (1, -1, 0), (0, 1, 4), (2, -1, 4) \rangle = \langle (1, 0, 4), (3, -2, 4) \rangle \neq \langle (1, -1, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Vimos que os problemas enunciados no início desta secção podem ser resolvidos utilizando matrizes, para $E = \mathbb{K}^n$. O que sucede se $E \neq \mathbb{K}^n$? Por exemplo, como resolver os problemas anteriores se

$$E = \mathbb{K}_r[x] \quad \text{ou} \quad E = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})?$$

Observação

- Para qualquer espaço vectorial E de dimensão n , se fixarmos em E uma base $\mathcal{B}$ então a “correspondência”

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ u &\mapsto (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{aligned}$$

que a cada vector $u \in E$ associa a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ (i.e. se $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ então $u = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$) é uma **aplicação bijectiva**.

- A resolução de problemas envolvendo vectores de $E = \mathbb{K}_r[x]$ ou de $E = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ pode ser feita com vectores, respectivamente, de $\mathbb{K}^{r+1}$ ou de $\mathbb{K}^{mn}$ utilizando as **sequências das coordenadas dos vectores** em causa **em relação a uma base fixa $\mathcal{B}$ de E** .
- O mesmo raciocínio pode ser seguido para qualquer espaço vectorial E de **dimensão finita** e assim continuar a utilizar as matrizes para resolver os problemas.

Exemplo

Em $\mathbb{R}_3[x]$, consideremos a sequência

$$S = (x^3 + 4x^2 + 3x + 6, 2, 2x^3 + 8x^2 + x + 3).$$

Verifiquemos que S é linearmente independente e determinemos uma base de $\mathbb{R}_3[x]$ que tenha S como subsequência.

Considere-se em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$. Em relação à base $\mathcal{B}$, a sequência das coordenadas de:

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 6 \quad \text{é} \quad (1, 4, 3, 6),$$

$$2 \quad \text{é} \quad (0, 0, 0, 2),$$

$$2x^3 + 8x^2 + x + 3 \quad \text{é} \quad (2, 8, 1, 3).$$

Como vimos num exemplo anterior a sequência

$$S' = ((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3))$$

é linearmente independente

Exemplo

e o mesmo sucede à sequência

$$\left((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3), (0, 1, 0, 0) \right).$$

O elemento de $\mathbb{R}_3[x]$ que na base $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$ tem a sequência de coordenadas

$$(0, 1, 0, 0) \quad \text{é} \quad 0x^3 + 1x^2 + 0x + 0 = x^2.$$

Assim,

$$S = (x^3 + 4x^2 + 3x + 6, 2, 2x^3 + 8x^2 + x + 3)$$

é linearmente independente e

$$(x^3 + 4x^2 + 3x + 6, 2, 2x^3 + 8x^2 + x + 3, x^2)$$

é também linearmente independente. Como tem $4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$ vectores é uma base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exemplo

Seja E um espaço vectorial tal que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ é uma base de E . Verifiquemos que a sequência

$$S = (e_1 + e_2 + e_4, 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4)$$

é linearmente independente e “completeemos” essa sequência de forma a obter uma base de E , isto é, determinemos uma base de E que tenha S como subsequência.

Em relação à base $\mathcal{B}$ a sequência das coordenadas de:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_4 & \text{ é } (1, 1, 0, 1), \\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 & \text{ é } (2, 2, 1, 1). \end{aligned}$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 + (-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

com

$$r(A) = 2$$

e, portanto, a sequência S é linearmente independente.

Exemplo

Dado que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 + (-2)l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

e $r(A') = 4$ podemos afirmar que

$$\left((1, 1, 0, 1), (2, 2, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \right)$$

é uma sequência linearmente independente.

Em relação à base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a sequência de coordenadas de

$$(0, 1, 0, 0) \quad \text{é} \quad 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 = e_2,$$

$$(0, 0, 0, 1) \quad \text{é} \quad 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4 = e_4.$$

Logo, $(e_1 + e_2 + e_4, 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4, e_2, e_4)$ é linearmente independente e como tem $4 = \dim E$ vectores é uma base de E .

4.8 Mais sobre a característica de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Designamos por espaço das linhas de A , e representamos por $\mathcal{L}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas m linhas de A .

O subespaço vectorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas n colunas de A é designado por **espaço das colunas** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$.

Às dimensões dos subespaços anteriormente definidos chamamos, respectivamente, característica de linha de A e **característica de coluna** de A .

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ então

$\mathcal{L}(A) = \langle (1, 0, -1), (2, 1, 0) \rangle$ e $\mathcal{C}(A) = \langle (1, 2), (0, 1), (-1, 0) \rangle$.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ então
 $\mathcal{L}(A) \neq \mathcal{L}(B)$ mas $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$

Observação

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se:

- 1 $\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$
- 2 Se $A \xrightarrow{(linhas)} B$ então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ Mas pode ter-se $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(B)$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Tem-se

- 1 As transformações elementares sobre linhas (resp., colunas) não alteram a característica de coluna (resp., de linha) de A .
- 2 A característica de linha e a característica de coluna de A são iguais e coincidem com a característica de A , isto é,

$$\dim(\mathcal{L}(A)) = \dim(\mathcal{C}(A)) = r(A).$$

Observação

São equivalentes as seguintes definições de **característica** de A :

- 1 A característica de A é o número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.
- 2 A característica de A é a dimensão do espaço das linhas de A .
- 3 A característica de A é a dimensão do espaço das colunas de A .
- 4 A característica de A é o número (máximo) de linhas linearmente independentes de A .
- 5 A característica de A é o número (máximo) de colunas linearmente independentes de A .

Teorema

Uma matriz e a sua transposta têm a mesma característica.

Proposição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$. Tem-se

$$r(AB) \leq r(A) \text{ e } r(AB) \leq r(B)$$

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Designamos por espaço nulo de A , e representamos por $\mathcal{N}(A)$, o subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ definido por

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K}) : AX = 0\}.$$

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ então

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = n - r(A).$$