FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Primeiro Teste – 23 de Novembro de 2011

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de 1 hora e 15 minutos de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,8 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,6 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração: 1 hora e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

1. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (\beta - 3)y + \beta z = 3 \\ 2x - 2y + (\beta + 1)z = \alpha + 4 \\ 3x - 3y + 3z = 3 \end{cases}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.

B Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

C Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ então o sistema é possível indeterminado.

D Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1 - z,\ -2,\ z) :\ z \in \mathbb{R}\}$.

Continua no verso desta folha

2. Sejam $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se a forma de escada reduzida de PQ é I_n então as matrizes P, Q e PQ têm característica n.

B A matriz PQ é invertível se, e só se, P e Q são ambas invertíveis.

C Se P é invertível então PQ e Q têm a mesma característica.

D Se $PQ = QP$ então $(P-Q)^2 \neq P^2 - 2PQ + Q^2$.

3. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível então $\det\left(3P^{-1}P^{\top}\right) = 3^n$.

B Se $P, Q, R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são invertíveis então PQR é invertível e $(PQR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1}P^{-1}$.

C Se $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com P invertível e $PQ = 0$, então $Q = 0$.

D Para quaisquer matrizes $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tem-se $(P-Q)(P+Q) = P^2 - Q^2$.

4. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere que

$$Q \xrightarrow[l_1+3l_2]{} R \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} S \xrightarrow[5l_2]{} T.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}Q.$

B Se $T = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

C Se Q é invertível então $|T| = -\frac{1}{5}|Q|$.

D Se $T = I_2$ então $Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$

5. Sejam $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A entrada $(3,1)$ de PR é igual à entrada $(1,3)$ de $R^{\top}P^{\top}$.

B P tem característica 3.

C A entrada $(4,1)$ de PR é igual a 0.

D S está em forma de escada reduzida.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*
Primeiro Teste – 23 de Novembro de 2011

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

[1.5] (a) Verifique que $|A| = -9$ e justifique que A é invertível. Qual o determinante de A^{-1}?

[1.5] (b) Determine os complementos algébricos das posições $(1,2)$ e $(4,4)$, isto é, os elementos $\widehat{A}_{12}$ e $\widehat{A}_{44}$.

[1.5] (c) Sabendo que a matriz dos complementos algébricos de A é

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 6 & \widehat{A}_{12} & 0 & 9 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 & \widehat{A}_{44} \end{bmatrix},$$

utilize $\widehat{A}$ para determinar A^{-1}.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = E_3E_2E_1,$$

em que $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[1.5] (a) Justifique que E_1, E_2 e E_3 são matrizes elementares e indique as respectivas inversas.

[1.5] (b) Justifique que A é invertível e exprima A^{-1} como produto das matrizes E_1^{-1}, E_2^{-1} e E_3^{-1}.

[1.5] (c) Justifique que a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e determine, sem utilizar a matriz $\operatorname{adj} B$, a inversa de B. **Verifique** que apresenta, efectivamente, a matriz B^{-1}.

Mude de Folha

[2.0] **8.** Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Prove que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Primeiro Teste – 23 de Novembro de 2011

Uma resolução com notas explicativas

1. C

2. D

3. D

4. C

5. B

6. (a) Calculemos $|A|$ a partir do determinante de uma matriz A', obtida a partir de A, efectuando transformações elementares sobre linhas/colunas. Dado que conhecemos o efeito que cada uma das transformações elementares tem sobre o determinante de uma matriz, sabemos relacionar $|A|$ com $|A'|$. Como sabemos que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal (fácil de calcular) tem especial interesse que A' seja triangular. Por exemplo,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_3+l_1 \\ l_4+(-1)l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{l_2 \leftrightarrow l_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1_\times 3_\times 3_\times 1) = -9.$$

Dado que $|A| \neq 0$ concluímos que A é invertível. Como $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ resulta que $|A^{-1}| = -\frac{1}{9}$.

■<u>Alternativamente</u>, podemos utilizar o Teorema de Laplace para o cálculo do determinante de A. Tem-se, por exemplo,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_2}{=}} 3_\times(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_1}{=}} -3\left(1_\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2_\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1_\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -3\Big(1_\times(2-4) - 2_\times(-2-2) + 1_\times(-2-1)\Big) = -3\,(-2+8-3) = -3_\times 3 = -9.$$

■

(b) Por definição, o complemento algébrico da posição (i,j) da matriz A, representado por $\widehat{A}_{ij}$, é

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j),$$

em que $A(i|j)$ é a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j.

Assim tem-se

$$\widehat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \det A(1|2) = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_1}{=}} -\left(3_\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = -\left(-3_\times(-4)\right) = -12$$

e

$$\widehat{A}_{44} = (-1)^{4+4} \det A(4|4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_2}{=}} 3_\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3_\times 3 = -9.$$

(c) Como a matriz A é invertível tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A,$$

em que $\operatorname{adj} A$ é a transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é, $\operatorname{adj} A = \widehat{A}^\top$. Atendendo a que

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 6 & \widehat{A}_{12} & 0 & 9 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 & \widehat{A}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 & -9 \end{bmatrix},$$

concluímos que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & -12 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 & -9 \end{bmatrix}^\top = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 & -9 \\ -12 & 4 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

7. (a) As matrizes $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes elementares 3×3 porque cada uma delas é obtida a partir da matriz identidade I_3 efectuando uma, e uma só, transformação elementar. Concretamente, tem-se

$$I_3 \xrightarrow[l_1+3l_2]{} E_1, \quad I_3 \xrightarrow[5l_1]{} E_2 \quad \text{e} \quad I_3 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} E_3.$$

Sabemos que toda a matriz elementar é invertível e que

$$I_3 \xrightarrow[l_1+(-3)l_2]{} E_1^{-1}, \quad I_3 \xrightarrow[\frac{1}{5}l_1]{} E_2^{-1} \quad \text{e} \quad I_3 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} E_3^{-1}.$$

Logo $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Dado que E_1, E_2 e E_3 são matrizes invertíveis 3×3 e como o produto de matrizes invertíveis é uma matriz invertível, concluímos que $A = E_3E_2E_1$ é invertível. Assim tem-se

$$A^{-1} = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}.$$

(c) Como

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-3)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que $\mathrm{r}(B) = 3 =$ ordem de B. Logo B é uma matriz invertível.

Abreviadamente, vamos determinar B^{-1} fazendo $[B \mid I_3] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_3 \mid B^{-1}]$.

$$[B \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-3)l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1+(-2)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] = [I_3 \mid B^{-1}].$$

Logo

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$. Vamos provar que $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

- Como $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ resulta que $(AB)^\top \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$.
  Dado que $B^\top \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ e $A^\top \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ vem que $B^\top A^\top \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$.
  Então $(AB)^\top$ e $B^\top A^\top$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$.
- Vejamos que os elementos homólogos de $(AB)^\top$ e $B^\top A^\top$ são iguais, isto é, que

$$\left((AB)^\top\right)_{ij} = \left(B^\top A^\top\right)_{ij},\ i = 1,\ldots,p,\ j = 1,\ldots,m.$$

  Tem-se

$$\left((AB)^\top\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \left(B^\top\right)_{ik}\left(A^\top\right)_{kj} = \left(B^\top A^\top\right)_{ij}.$$

Logo

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$