FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Segundo Teste – 18 de Janeiro de 2012

Duração Total: 1 hora e 30 minutos

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

1. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+2d,\ 3a+6d),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

[2.0] (a) Determine uma base da imagem de f.

[2.0] (b) Indique, justificando, se f é injectiva e se f é sobrejectiva.

[2.5] (c) Considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \Big((1,1),(0,1)\Big)$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

[2.5] (d) Determine $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$ utilizando a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ referida na alínea anterior.

Mude de Folha

[2.0] **2.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e considere o conjunto $F = \{Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ YA = AY\}$. Mostre que F é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Mude de Folha

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Sem calcular os valores e vectores próprios de A, averigúe se $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$ é vector próprio de A.

[2.0] (b) Calcule os valores próprios de A.

[2.5] (c) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[2.5] (d) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[1.0] **4.** Mostre que matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Segundo Teste – 18 de Janeiro de 2012

Uma resolução com notas explicativas

1. (a) Por definição, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \left\{ f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) : \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{(a+2d,\ 3a+6d) : \ a,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,\ 3a) + (2d,\ 6d) : \ a,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1,\ 3) + d(2,\ 6) : \ a,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \Big\langle (1,\ 3), (2,\ 6) \Big\rangle\end{aligned}$$

pelo que $\big((1,\ 3),(2,\ 6)\big)$ é uma sequência geradora de $\operatorname{Im} f$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que $\big((1,\ 3)\big)$ é uma sequência geradora de $\operatorname{Im} f$, é linearmente independente e, portanto, $\big((1,\ 3)\big)$ é uma base de $\operatorname{Im} f$.

(b) Uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, a sua imagem coincide com o conjunto de chegada que, neste caso, é $\mathbb{R}^2$. Dado que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e, pela alínea anterior, $\dim \operatorname{Im} f = 1 \neq \dim \mathbb{R}^2$, concluímos que

$$\operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{R}^2$$

pelo que f não é sobrejectiva.

Uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo tem dimensão 0. Dado que $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, pelo Teorema da Dimensão, sabemos que $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f$. Como $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ e, pela alínea anterior, $\dim \operatorname{Im} f = 1$ concluímos que $\dim \operatorname{Nuc} f = 3 \neq 0$ pelo que f não é injectiva.

(c) Como

$$\begin{array}{rcccccc} f\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) & = & (3,9) & = & \mathbf{3}(1,1) & + & \mathbf{6}(0,1) \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) & = & (2,6) & = & \mathbf{2}(1,1) & + & \mathbf{4}(0,1) \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) & = & (2,6) & = & \mathbf{2}(1,1) & + & \mathbf{4}(0,1) \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) & = & (2,6) & = & \mathbf{2}(1,1) & + & \mathbf{4}(0,1) \end{array},$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$, temos $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

(d) Recordemos que, se $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ é a sequência das coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}_1$ então a sequência das coordenadas do vector $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$ na base $\mathcal{B}_2$ é (β_1,β_2) em que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

A sequência das coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ na base $\mathcal{B}_1$ é $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (1,1,1,1)$ pois

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = 1 \end{cases}.$$

Como

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\6&4&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\18\end{bmatrix}$$

concluímos que $(9,18)$ é a sequência das coordenadas do vector $f\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)$ nas base $\mathcal{B}_2$ e, portanto,

$$f\left(\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right)=9(1,1)+18(0,1)=(9,27).$$

2. Utilizemos o Critério de Subespaço Vectorial para verificar que $F=\{Y\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}):\ YA=AY\}$ é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

- Atendendo à definição de F conclui-se que $F\subseteq\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- $0_{n\times n}\in F$ porque $0_{n\times n}A=A0_{n\times n}$.
- Sejam $X,Y\in F$. Vejamos que $X+Y\in F$.
  Como $X,Y\in F$ tem-se $XA=AX$ e $YA=AY$. Assim tem-se

  $$(X+Y)A=XA+YA=AX+AY=A(X+Y).$$

  Logo $X+Y\in F$.
- Sejam $\alpha\in\mathbb{R}$ e $Y\in F$. Vejamos que $\alpha Y\in F$.
  Como $Y\in F$ tem-se $YA=AY$. Assim tem-se

  $$(\alpha Y)A=\alpha(YA)=\alpha(AY)=A(\alpha Y).$$

  Logo $\alpha Y\in F$.

Concluímos, portanto, que F é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

3. (a) Sabemos que X é vector próprio de A se, e só se, $X\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ é não nulo e $AX=\alpha X$, para algum $\alpha\in\mathbb{R}$.
Como $\begin{bmatrix}3\\-6\\0\end{bmatrix}\neq 0$ e $A\begin{bmatrix}3\\-6\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-12\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3\\-6\\0\end{bmatrix}$ concluimos que $\begin{bmatrix}3\\-6\\0\end{bmatrix}$ é vector próprio de A (associado ao valor próprio 2).

(b) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}|A-xI_3|&=\begin{vmatrix}2-x&0&0\\-2&1-x&-1\\-2&-1&1-x\end{vmatrix}\overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_1}{=}}(2-x)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1-x&-1\\-1&1-x\end{vmatrix}\\&=(2-x)\left[(1-x)^2-1^2)\right]=(2-x)(-x)(2-x).\end{aligned}$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 2 e 0, com $\mathrm{ma}(2)=2$ e $\mathrm{ma}(0)=1$.

(c) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha=\{X\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ AX=\alpha X\}=\{X\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ (A-\alpha I_3)X=0\}.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ (A-2I_3)\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A-2I_3|0)=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_3]{}\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[l_2+(-1)l_1]{}\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}l_1]{}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_2=\left\{\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ a=-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right\}=\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\\ b\\ c\end{bmatrix}:\ b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b\\ b\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c\\ 0\\ c\end{bmatrix}:\ b,c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{b\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}:\ b,c\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_2 porque gera M_2 e é linearmente independente (pois $\alpha\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\alpha=\beta=0$). Tem-se, então, que $\mathrm{mg}(2)=\dim M_2=2$.

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0=\left\{\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ (A-0I_3)\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A-0I_3|0)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[l_3+l_1]{l_2+l_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}l_1]{l_3+l_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad\text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_0=\left\{\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}):\ a=0\ \wedge\ b=c\right\}=\left\{\begin{bmatrix} 0\\ c\\ c\end{bmatrix}:\ c\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{c\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}:\ c\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_0 pois gera M_0 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\mathrm{mg}(0)=\dim M_0=1$.

(d) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Pela alínea anterior, temos

$$\mathrm{mg}(2)+\mathrm{mg}(0)=3=\text{ordem de } A,$$

logo A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 2, 2 e 0 na diagonal. Se $D=\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{2} & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ então considerando, por

exemplo, a matriz $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde a primeira e a segunda colunas são os vectores da base de M_2 e a terceira coluna é o vector da base de M_0, a matriz P é invertível e, além disso, tem-se $P^{-1}AP = D$.

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes, isto é, existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Nestas condições tem-se

$$\begin{aligned} |B - xI_n| &= \left|P^{-1}AP - xI_n\right| = \left|P^{-1}AP - xP^{-1}I_nP\right| = \left|P^{-1}\left(A - xI_n\right)P\right| = \left|P^{-1}\right| |A - xI_n| \, |P| \\ &= \left|P^{-1}\right| |P| \, |A - xI_n| = \left|P^{-1}P\right| |A - xI_n| = |I_n| \, |A - xI_n| = |A - xI_n| \, . \end{aligned}$$

e, portanto, A e B têm o mesmo polinómio característico.