FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 7 de Novembro de 2012

Duração: 1 hora

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Atenção

Esta prova consiste em 10 grupos sendo os primeiros 8 de escolha múltipla. Em cada um destes 8 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +2,0 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,66 valores.**

- **A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 8 grupos de escolha múltipla.**
- **O enunciado da prova é composto por 2 folhas, frente e verso, que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova deve entregar o enunciado completo.**
- **A duração da prova é de 1 hora.**

Grelha de Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				X
2.			X	
3.		X		
4.			X	
5.				X
6.			X	
7.	X			
8.				X

1. Considere as matrizes $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz G tem característica 3.

B A matriz F tem característica 1.

C A matriz G não é invertível.

D Existe uma matriz invertível e equivalente por linhas a G.

Continua no verso desta folha

2. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz arbitrária. Considere que

$$Q \xrightarrow[7l_1]{} R \xrightarrow[l_2+4l_1]{} S \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} T.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}Q.$

$\boxed{\text{B}}$ Se $T = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

$\boxed{\text{C}}$ $S = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}Q.$

$\boxed{\text{D}}$ Se $T = I_2$ então $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

3. Considere o sistema de equações lineares, sobre $\mathbb{R}$, cuja representação matricial $AX = B$ tem matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right].$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $(1, 0, -2, 0)$ é solução do sistema.

$\boxed{\text{B}}$ O conjunto das soluções do sistema é $\{(1 + 2b - d, b, -2, d) : \ b, d \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $(0, 0, 0, 0)$ não é solução do sistema.

$\boxed{\text{D}}$ $(1, 0, 1, 0)$ não é solução do sistema.

4. Considere um sistema de equações lineares, sobre $\mathbb{R}$, cuja representação matricial $AX = B$ tem matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha(\beta-2) & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta-2 & \beta^2-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 2$ então o sistema é possível determinado.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 2$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 2$ então o sistema é impossível.

Continua na próxima folha

5. Seja $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, uma matriz invertível. Considere que

$$Q \xrightarrow[7l_1]{} R \xrightarrow[l_2+4l_1]{} S \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} T.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det S = \det R$.

B $\det T = -\det R$.

C $\det S \neq 0$.

D $\det R = \frac{1}{7}\det Q$.

6. Sejam $P, Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $\det P = 2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz P é invertível e $\det\left(P^{-1}\right) = \frac{1}{2}$.

B $\det(3P) = 3^n \cdot 2$.

C $\det(PQ) \neq \det(QP)$.

D $\det\left(P^\top P^2\right) = 8$.

7. Considere a matriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det H = 10$.

B Em H, o complemento algébrico da posição $(3,1)$ é igual a 0.

C H é invertível.

D $\det H(1|4) = -2$.

8. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere a matriz $A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & \alpha-4 & \beta \\ 1 & 3 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha \neq 1$ e $\beta \neq 0$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 3.

B Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 1.

C Se $\alpha \neq 1$ e $\beta = 0$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 2.

D Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ então $A_{\alpha,\beta}$ tem característica 3.

Continua no verso desta folha

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Segundo Teste – 7 de Novembro de 2012

Duração: 1 hora

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[2,0] **9.** Justifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ é invertível e determine a inversa de A, sem utilizar determinantes.

Verifique que apresenta, efectivamente, a matriz A^{-1}.

Mude de Folha

[2,0] **10.** Considere a matriz $H = \begin{bmatrix} a_{11}+\beta_1 & \cdots & a_{1n}+\beta_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$. Demonstre que

$$\det H = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Fim

9. Como

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que $\mathrm{r}(A) = 3 =$ ordem de A. Logo A é uma matriz invertível.

Abreviadamente, vamos determinar A^{-1} fazendo $[A \mid I_3] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_3 \mid A^{-1}]$.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + (-2)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}].$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Demonstremos que

$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} + \beta_1 & \cdots & a_{1n} + \beta_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{H} = \det \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} + \det \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{B}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à linha 1 de H obtemos

$$\begin{aligned} \det H &= (a_{11} + \beta_1)\widehat{h}_{11} + \cdots + (a_{1n} + \beta_n)\widehat{h}_{1n} \\ &= (a_{11}\widehat{h}_{11} + \cdots + a_{1n}\widehat{h}_{1n}) + (\beta_1\widehat{h}_{11} + \cdots + \beta_n\widehat{h}_{1n}). \end{aligned}$$

Como as matrizes H, A e B só diferem na linha 1 temos

$$\begin{aligned} \det H &= (a_{11} \underbrace{\widehat{h}_{11}}_{\widehat{a}_{11}} + \cdots + a_{1n} \underbrace{\widehat{h}_{1n}}_{\widehat{a}_{1n}}) + (\beta_1 \underbrace{\widehat{h}_{11}}_{\widehat{b}_{11}} + \cdots + \beta_n \underbrace{\widehat{h}_{1n}}_{\widehat{b}_{1n}}) \\ &= \det A + \det B, \end{aligned}$$

como pretendíamos provar.