FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Terceiro Teste – 30 de Novembro de 2012

Duração: 1 hora

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Atenção

Esta prova consiste em 9 grupos:

- **Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla**
- **Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.**
- **Grupos 8 e 9 - Para responder justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 3 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +2,0 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,66 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.		X		
2.			X	
3.				X
4.	X			
5.		X		

---

1. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere os vectores

$$u_1 = (1,0,1), \quad u_2 = (1,1,1), \quad u_3 = (2,0,1) \quad \text{e} \quad u_4 = (0,-6,-3).$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A (u_1, u_2, u_3) é uma sequência linearmente independente.

B $(0,-8,-4) \notin \langle u_2, u_3 \rangle$.

C (u_2, u_3, u_4) é uma sequência linearmente dependente.

D $\dim\langle u_2, u_3, u_4 \rangle = 2$.

Continua no verso desta folha

2. No espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \Big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 :\ a = b - 2c \ \wedge\ d = 0\Big\} \qquad \text{e} \qquad G = \Big\langle (0,2,1,1), (0,0,0,1) \Big\rangle.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $F = \big\langle (1,1,0,0), (-2,0,1,0) \big\rangle$.

B $\dim G = 2$.

C $\dim(F+G) = 4$.

D $(0,2,1,0) \in F \cap G$.

3. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, -e_3, 4e_2)$ bases de um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Em relação à base $\mathcal{B}$, a sequência das coordenadas do vector $-3e_1 + e_2 - e_3$ é $(-3, 1, -1)$.

B O vector que, em relação à base $\mathcal{B}'$, tem a sequência de coordenadas $(0, -1, 0)$ é o vector e_3.

C A sequência $(e_1 + 2e_2, -e_3, e_2)$ é linearmente independente.

D $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle \neq \langle e_1 + 2e_2, -e_3, e_2 \rangle$.

4. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$, considere

$$F_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 :\ a = 2b\}, \quad F_2 = \{(2,0,0), (0,0,0)\},$$

$$F_3 = \{(a, a+2, 0) :\ a \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad F_4 = \{(0,0,0)\}.$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A F_4 é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com $\dim F_4 = 1$.

B F_2 não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

C F_3 não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

D F_1 é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com $\dim F_1 = 2$.

5. Seja E um espaço vectorial com dimensão n.

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de E então $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de E.

B Existe uma sequência $(w_1, \ldots, w_n)$, geradora de E, que não é uma base de E.

C Se $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de E então toda a subsequência de $(u_1, \ldots, u_n)$ é linearmente independente.

D Se $(u_1, \ldots, u_r)$, com $r < n$, é uma sequência linearmente independente de vectores de E então existem vectores $v_1, \ldots, v_{n-r}$ de E tais que $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r})$ é uma base de E.

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:

- **Se responder correctamente:** $+0,75$ **valores.**
- **Se não responder ou responder erradamente:** 0 **valores.**

[Cotação]

[0,75] **6.** (a) $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & 2a+b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $\dim H = \underline{2}$.

[0,75] (b) $\dim \mathbb{R}_3[x] = \underline{4}$.

[0,75] (c) Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E, com $\dim F = 2$, $\dim G = 3$ e $\dim(F+G) = 4$ então $\dim(F \cap G) = \underline{1}$.

[0,75] (d) $\dim \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}) = \underline{12}$.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $A \operatorname{adj} A = -2I_4$ e seja $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ uma matriz não invertível.

[0,75] (a) $\det A = \underline{-2}$.

[0,75] (b) $B \operatorname{adj} B = \underline{0_{4\times 4}}$.

[0,75] (c) $\det(\operatorname{adj} A) = \underline{-8}$.

[0,75] (d) A matriz $\operatorname{adj} A$ é invertível? Sim (Sim/Não)

Continua no verso desta folha

Nos Grupos 8 e 9 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

[Cotação]

[2,0] **8.** Seja $A = 3I_n$, com $n \geq 2$. Utilizando a inversa de A, justifique que $\operatorname{adj} A = 3^{n-1} I_n$.

Resposta ao Grupo 8:

Como $\det A = \det(3I_n) = 3^n \neq 0$ podemos afirmar que A é invertível. Concluímos também facilmente que $A^{-1} = \frac{1}{3} I_n$.

Dado que A é invertível e $n \geq 2$ tem-se $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$, ou equivalentemente, $\operatorname{adj} A = (\det A) A^{-1}$. Atendendo a que $\det A = 3^n$ e $A^{-1} = \frac{1}{3} I_n$ resulta que

$$\operatorname{adj} A = 3^n \frac{1}{3} I_n = 3^{n-1} I_n.$$

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ____________________

Número de aluno: | | | | | |

[Cotação]

[2,0] **9.** Seja $(u_1, \ldots, u_n)$ uma base de um subespaço W de $\mathbb{K}_n[x]$ e seja v um vector de $\mathbb{K}_n[x]$ tal que $v \notin W$. Mostre que $(u_1, \ldots, u_n, v)$ é uma base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Resposta ao Grupo 9:

Como $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base do subespaço W de $\mathbb{K}_n[x]$, $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma sequência de vectores linearmente independente com n vectores de $\mathbb{K}_n[x]$. Dado que v é um vector de $\mathbb{K}_n[x]$ que não pertence a W, tal corresponde a afirmar que v não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_n$. Assim podemos concluir que a sequência $(u_1, \ldots, u_n, v)$ de $n+1$ vectores de $\mathbb{K}_n[x]$ é linearmente independente. Além disso, concluímos também que $(u_1, \ldots, u_n, v)$ é uma base de $\mathbb{K}_n[x]$ pois, como $\dim \mathbb{K}_n[x] = n+1$, qualquer sequência linearmente independente, com $n+1$ vectores de $\mathbb{K}_n[x]$, é base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Fim