

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): _____

Número de aluno:

--	--	--	--	--

Atenção

O teste é constituído por 8 grupos:

- Grupos 1 a 6 - Para indicar a resposta, no espaço respectivo do enunciado, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações.
- Grupos 7 e 8 - Para responder justificando todas as afirmações.

O enunciado da prova é composto por 3 folhas que não podem ser desagafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

[Cotação]

1. Considere um sistema de equações lineares, sobre $\mathbb{R}$, cuja representação matricial $AX = B$ tem matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & 1 - \beta \end{array} \right], \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- (a) Preencha com IMPOSSÍVEL, POSSÍVEL DETERMINADO ou POSSÍVEL INDETERMINADO (indicando, neste caso, o grau de indeterminação) de forma a obter afirmações verdadeiras.

[1,0] i. Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq \beta$, o sistema é POSSÍVEL DETERMINADO.

[1,0] ii. Se $\alpha = 1$ e $\alpha = \beta$, o sistema é POSSÍVEL INDETERMINADO COM GRAU DE INDETERM. 2.

[1,0] iii. Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha = \beta$, o sistema é IMPOSSÍVEL.

[1,0] (b) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, o conjunto das soluções do sistema é
 $\{(1 - 2a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Continua no verso desta folha

2. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares cuja matriz simples é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

[1,0] (a) Se $(1, 2, -1)$ é solução do sistema então $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

[1,0] (b) Se $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ então a solução do sistema é $(0, 1, 1)$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$. Indique o valor de:

[1,0] (a) $\det A = \underline{-4}$.

[1,0] (b) $\hat{a}_{14} = \underline{-4}$.

[1,0] (c) $(\text{adj } A)_{41} = \underline{-4}$.

[1,0] (d) $(A^{-1})_{41} = \underline{1}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que $\det A = 5$. Indique o valor de:

[1,0] (a) $\det \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \underline{10}$.

[1,0] (b) $\det \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \underline{5}$.

5. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 3$ e $\det B = 4$. Indique o valor de:

[1,0] (a) $\det(2B^T) = \underline{32}$.

[1,0] (b) $\det(B^{-1}A^2) = \underline{9/4}$.

[1,0] 6. (a) O subespaço

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \wedge y = z\}$$

de $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado pelo vector $\underline{(-2, 1, 1)}$.

[1,0] (b) O subespaço

$$G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tem dimensão igual a $\underline{2}$.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): _____

Número de aluno:

--	--	--	--	--

[Cotação] Nos Grupos 7 e 8 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ tal que $AA^\top = 2I_4$.[1,0] (a) Justifique que $\det A \in \{4, -4\}$ e conclua que A é invertível.[1,0] (b) Utilizando a inversa de A , conclua que $\text{adj } A = 2A^\top$ ou $\text{adj } A = -2A^\top$.Resposta ao Grupo 7:(a) [Para simplificar a exposição, consideramos a notação $|A|$ para representar $\det A$.]Como $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ e $AA^\top = 2I_4$ tem-se $|AA^\top| = |2I_4|$, isto é, $|A||A^\top| = 2^4 |I_4|$, ou equivalentemente, $|A||A| = 2^4$. Assim concluímos que $|A|^2 = 16$ e, portanto,

$$|A| = -4 \quad \text{ou} \quad |A| = 4.$$

Logo $|A| \in \{-4, 4\}$ e, uma vez que $|A| \neq 0$, a matriz A é invertível.(b) Dado que $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$ e $AA^\top = 2I_4$ tem-se $A\left(\frac{1}{2}A^\top\right) = I_4$ e, portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}A^\top.$$

Por outro lado, $|A| \in \{-4, 4\}$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A.$$

Assim tem-se

$$\frac{1}{2}A^\top = \frac{1}{-4} \text{adj } A \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}A^\top = \frac{1}{4} \text{adj } A,$$

isto é,

$$-2A^\top = \text{adj } A \quad \text{ou} \quad 2A^\top = \text{adj } A.$$

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): _____

Número de aluno:

--	--	--	--	--

[Cotação] Nos Grupos 7 e 8 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

- [2,0] 8. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E linearmente independentes. Demonstre que se $v \in E$ não é combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$ então os vectores $u_1, \dots, u_r, v$ são linearmente independentes.

Resposta ao Grupo 8:

Com vista à obtenção de uma contradição suponhamos que $u_1, \dots, u_r, v$ são linearmente dependentes, isto é, que existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+1}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v = 0_E. \quad (1)$$

Notemos que $\alpha_{r+1} \neq 0$ pois, caso contrário, concluíamos que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes. Como $\alpha_{r+1} \neq 0$, de (1) obtemos

$$\alpha_{r+1} v = (-\alpha_1) u_1 + \dots + (-\alpha_r) u_r,$$

ou ainda,

$$v = (-\alpha_{r+1}^{-1} \alpha_1) u_1 + \dots + (-\alpha_{r+1}^{-1} \alpha_r) u_r,$$

o que contradiz a hipótese de v não ser combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$.

Logo $u_1, \dots, u_r, v$ são linearmente independentes.