FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Terceiro Teste – 14 de Dezembro de 2013

Duração: 1 hora

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Atenção

O teste é constituído por 8 grupos:

- **Grupos 1 a 6 - Para indicar a resposta, no espaço respectivo do enunciado, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações.**
- **Grupos 7 e 8 - Para responder justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 3 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

[Cotação]

1. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente,

$$\mathcal{B} = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \big((1,1),(1,0)\big).$$

Seja $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se:

[1,0] (a) $f(1,2,3) =$ $\mathbf{(6,3)}$.

[1,0] (b) $\dim \operatorname{Im} f =$ $\mathbf{1}$.

[1,0] (c) $\dim \operatorname{Nuc} f =$ $\mathbf{2}$.

2. Seja $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que $f(a,b,c) = (a-b-2c, b+c)$, para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se:

[1,0] (a) Uma base do núcleo de f é $\mathbf{((1,-1,1))}$.

[1,0] (b) Se $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(0,0,1),(0,1,0)\big)$ e $B' = \big((0,1),(1,0)\big)$ então $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

3. Seja $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1,0,2,0) \quad \text{e} \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = (0,-1,0,0).$$

Tem-se:

[1,0] (a) $f\left(2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = (\mathbf{2}, \mathbf{-3}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$.

[1,0] (b) $f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

[1,0] (c) Se f é injectiva então $\operatorname{Nuc} f = \left\{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}$.

4. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ tais que $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se:

[1,0] (a) $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

[1,0] (b) Se o vector $v \in \mathbb{R}^2$ tem sequência de coordenadas $(1,1)$ na base $\mathcal{B}$ então a sequência de coordenadas de v na base $\mathcal{B}'$ é $\underline{\ (\mathbf{3}, \mathbf{1})\ }$.

5. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + c = 0\right\}, \quad G = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 3b + 3c = 0\right\} \quad \text{e} \quad H = \left\langle (1,-1,1) \right\rangle.$$

Tem-se:

[1,0] (a) Uma base de F é $\underline{\ ((\mathbf{-2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}))\ }$.

[1,0] (b) Uma base de $F \cap G$ é $\underline{\ ((\mathbf{3}, \mathbf{-2}, \mathbf{1}))\ }$.

[1,0] (c) Os vectores $\underline{(\mathbf{-2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{-1}, \mathbf{1})}$ são geradores de $F + H$.

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Tem-se:

[1,0] (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio $\underline{\ \mathbf{3}\ }$.

[1,0] (b) Os valores próprios de A são $\underline{\ \mathbf{-2} \text{ e } \mathbf{3}\ }$.

[1,0] (c) A matriz A é diagonalizável e, sendo $P = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, P é invertível e $P^{-1}AP$ é a matriz diagonal $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

[Cotação] **Nos Grupos 7 e 8 só serão considerados as respostas devidamente justificadas.**

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Verifique que 0 é valor próprio de A e determine os restantes valores próprios da matriz. Indique as multiplicidades algébricas de cada um dos valores próprios de A.

[1,0] (b) Determine uma base para o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0.

Resposta ao Grupo 7:

(a) É elementar concluir que 0 é valor próprio de A pois A não é invertível. Basta notar que $|A| = 0$, ou alternativamente, que $\mathrm{r}(A) = 1 \neq 3 =$ ordem de A.

Determinemos todos os valores próprios de A. O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} \underset{l_2}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}$$
$$= (-x)\left[(1-x)^2 - 1^2)\right] = (-x)(-x)(2-x).$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 0 e 2, com $\mathrm{ma}(0) = 2$ e $\mathrm{ma}(2) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; (A - 0I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>: $(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 + (-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (f.e.r.)

Logo,

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; a = -c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -c \\ b \\ c \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \; b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_0 porque gera M_0 e é linearmente independente (pois $\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$).

Continua no verso desta folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

[Cotação] **Nos Grupos 7 e 8 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.**

8. Sejam $A, B, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com P invertível, e tais que $B = P^{-1}AP$. Demonstre que:

[1,0] (a) As matrizes A e B têm o mesmo polinómio característico.

[1,0] (b) Se X é vector próprio de A então $P^{-1}X$ é vector próprio de B associado ao mesmo valor próprio.

Resposta ao Grupo 8:

(a) Demonstremos que A e B têm o mesmo polinómio característico, isto é, que $|A - xI_n| = |B - xI_n|$. Tem-se

$$\begin{aligned}|B - xI_n| &= \left|P^{-1}AP - xI_n\right| = \left|P^{-1}AP - xP^{-1}I_nP\right| = \left|P^{-1}(A - xI_n)P\right| = \left|P^{-1}\right||A - xI_n||P| \\ &= \left|P^{-1}\right||P||A - xI_n| = \left|P^{-1}P\right||A - xI_n| = |I_n||A - xI_n| = |A - xI_n|\,.\end{aligned}$$

(b) Se X é vector próprio de A então $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, com $X \neq 0_{n\times 1}$, e existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $AX = \alpha X$. Demonstremos que, nas condições do enunciado, $P^{-1}X$ é vector próprio de B associado ao valor próprio α.

- Notemos que $P^{-1}X \neq 0_{n\times 1}$. De facto, se tivermos $P^{-1}X = 0_{n\times 1}$, multiplicando ambos os membros da igualdade anterior, à esquerda, por P obtemos

$$P(P^{-1}X) = P0_{n\times 1} \Leftrightarrow X = 0_{n\times 1},$$

  o que é uma contradição pois, por hipótese, $X \neq 0_{n\times 1}$.
- $B(P^{-1}X) = \left(P^{-1}AP\right)P^{-1}X = P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)X = P^{-1}AI_nX = P^{-1}AX = P^{-1}(AX) = P^{-1}(\alpha X) = \alpha(P^{-1}X)$.

Atendendo a que

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad P^{-1}X \neq 0_{n\times 1} \quad \text{e} \quad B(P^{-1}X) = \alpha(P^{-1}X)$$

concluímos que $P^{-1}X$ é vector próprio de B associado ao valor próprio α.

Fim