

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadradinhos respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome:
..... Número de aluno:
Curso: Número de caderno:

O teste é composto por 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Nas questões 1-5 marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta, cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta errada desconta 0,6 valores e marcações múltiplas anulam a questão. Se a soma das classificações das questões de escolha múltipla der um número negativo, será atribuído 0 valores à parte de escolha múltipla. As questões 6, 7 e 8 valem, respectivamente, 4, 4 e 2 valores.

Questão 1 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Seja $D = AB^T - C$.

Indique qual das afirmações seguintes é **VERDADEIRA**:

- a) $D_{3,2} = -1$. b) $D_{3,2} = -3$. c) $D_{3,2} = -2$. d) $D_{3,2} = 0$.

Questão 2 Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Indique qual das afirmações seguintes é **VERDADEIRA**:

- a) $A + B$ é hemi-simétrica. c) A é hemi-simétrica.
 b) A é hermítica. d) $-B$ é hemi-hermítica.

Questão 3 Considere as matrizes A, A_1, B, B_1, B_2 e C , onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A \xrightarrow{l_2+(-2)l_3} A_1, B \xrightarrow{l_1+(-1)l_2} B_1 \text{ e } B \xrightarrow{l_3 \leftrightarrow l_4} B_2.$$

Indique qual das afirmações seguintes é **FALSA**:

- a) As matrizes A, A_1 e C estão em forma de escada.
- b) As matrizes A_1 e B_2 não estão em forma de escada reduzida.
- c) As matrizes B e B_1 não estão em forma de escada.
- d) As matrizes A e C não estão em forma de escada reduzida.

Questão 4 Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **VERDADEIRA**:

- a) A é invertível.
- b) A é uma matriz elementar.
- c) A é uma matriz em forma de escada reduzida.
- d) $r(A) = 4$.

Questão 5 Considere as seguintes matrizes

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indique qual das afirmações seguintes é **VERDADEIRA**:

- a) U é uma matriz elementar e $U^{-1} = V$.
- b) U é uma matriz elementar e $U^{-1} = W$.
- c) V é uma matriz elementar e $V^{-1} = W$.
- d) U é uma matriz elementar e $U^{-1} = U$.

Questão 6 Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} B \xrightarrow{T} I_3.$$

1. Determine matrizes elementares E, F tais que $EFA = I_3$.
2. Justifique que A é invertível e obtenha a sua inversa.
3. Determine $E^{-1}A^{-1}$.

Questão 7 Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o seguinte sistema de equações lineares, sobre \mathbb{R} , nas incógnitas x, y, z

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é impossível.
2. Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e determinado.
3. Resolva o sistema para $\alpha = 0$ indicando neste caso o conjunto solução do sistema.

Questão 8 Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Justifique detalhadamente que

$$r(A) \leq \min\{m, n\}.$$