Questão 6: Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Seja $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} B \xrightarrow[T]{} I_3.$$

(a) Determine matrizes elementares E, F tais que $EFA = I_3$.

(b) Justifique que A é invertível e obtenha a sua inversa.

(c) Determine $E^{-1}A^{-1}$.

Resposta:

(1) Como $A \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} B$, temos que $B = FA$ onde F é a matriz elementar que se obtém efectuando a transformação elementar $I_3 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[T]{} I_3$ concluímos que T é a transformação elementar $l_2 + (-2)l_3$. Assim, $I_3 = EB$ onde E é a matriz elementar que se obtém efectuando a transformação elementar $I_3 \xrightarrow[l_2+(-2)l_3]{} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Consequentemente, $I_3 = EB = EFA$, sendo E e F as matrizes elementares anteriormente indicadas.

(2) Do enunciado verificamos que a matriz A é equivalente por linhas à matriz identidade, donde podemos concluir que A é invertível.

Como $\underbrace{EF}A = I_3$, então $A^{-1} = EF$.

Assim, $A^{-1} = EF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) Pela alínea (2) sabemos que $A^{-1} = EF$.

Multiplicando à esquerda pela matriz E^{-1} (recordemos que E é uma matriz elementar e por isso é invertível), usando a propriedade associativa da multiplicação de matrizes, a definição de inversa de uma matriz e o facto de a matriz identidade ser o elementro neutro para a multiplicação de matrizes obtemos as seguintes igualdades

$$E^{-1}A^{-1} = E^{-1}(EF) = (E^{-1}E)F = I_3F = F.$$

Logo, pela alínea (1), $E^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Questão 7: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o seguinte sistema de equações lineares, sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x, y, z

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é impossível.

(b) Indique para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e determinado.

(c) Resolva o sistema para $\alpha = 0$ indicando neste caso o conjunto solução do sistema.

Resposta:

Podemos discutir o sistema dado, de agora em diante denotado por $AX = B$, comparando $r(A)$ e $r([A \mid B])$ onde

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{array}\right].$$

- Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ a matriz ampliada do sistema $[A \mid B]$ está em forma de escada e temos $r(A) = r([A \mid B]) = 3$.
- Se $\alpha = 1$ a matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ que está em forma de escada e, assim, $r(A) = 2$ e $r([A \mid B]) = 3$.
- Para $\alpha = 0$ a matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$ que não está em forma de escada. Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 + (-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Concluímos que neste caso $r(A) = r([A \mid B]) = 2$.

Os casos apresentados permitem-nos saber $r(A)$ e $r([A \mid B])$ para qualquer valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Respondendo à alínea (1) sabemos que o sistema $AX = B$ é impossível se, e só se, $r(A) < r([A \mid B])$. Pela análise feita anteriormente concluímos que o sistema é impossível se, e só se, $\alpha = 1$.

Relativamente à alínea (2) sabemos que o sistema $AX = B$ é possível e determinado se, e só se, $r(A) = r([A \mid B])$ e este valor da característica for igual ao número de incógnitas. Ora este sistema tem 3 incógnitas pelo que, atendendo à análise anterior, concluímos que o sistema é possível e determinado se, e só se, $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$.

(3) Tal como anteriormente indicado, para $\alpha = 0$, temos

$$[A \mid B] \xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1+(-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(f.e.r)}$$

Concluímos que o sistema dado é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y & = & 4 \\ z & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 + y \\ z & = & -1 \end{array}\right. .$$

Assim, o conjunto solução do sistema é

$$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 : \alpha = 4 + \beta \ \wedge \ \gamma = -1\} = \{(4 + \beta, \beta, -1) : \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que para $\alpha = 0$ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1 (=n$^{\text{o}}$ de incógintas $-$ $r(A)$).

Questão 8: Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Justifique detalhadamente que

$$r(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Resposta: Recordemos que a característica de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, denotada por $r(A)$, é o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A. Notemos que matrizes equivalentes por linhas são do mesmo tipo $m \times n$. Assim, da contagem do número de linhas não nulas resultará um valor menor ou igual ao número de linhas da matriz, ou seja, conclui-se que $r(A) \leq m$.

Por outro lado, numa matriz em forma de escada os pivôs, caso existam, encontram-se em colunas distintas. Logo, o número total de índices de coluna dos pivôs é menor ou igual ao número de colunas n. Como apenas as linhas não nulas têm pivô, então $r(A)$ é menor ou igual a n.

Portanto, $r(A) \leq m$ e $r(A) \leq n$, ou seja, $r(A) \leq \min\{m, n\}$.