

Número de aluno

0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

← Marque o seu número de aluno preenchendo completamente os quadrados respectivos da grelha ao lado (■) e escreva o nome completo, o número e o curso abaixo.

Nome:

.....

Curso: Número de aluno:

O teste é composto por 5 questões de escolha múltipla e 3 de resposta aberta. Nas questões 1–5 marque a resposta certa preenchendo completamente o quadrado respectivo (■) com caneta azul ou preta, cada resposta certa vale 2 valores, cada resposta errada desconta 0,6 valores e marcações múltiplas anulam a questão. Se a soma das classificações das questões de escolha múltipla der um número negativo, será atribuído 0 valores à parte de escolha múltipla. As questões 6, 7 e 8 valem, respectivamente, 3, 5 e 2 valores.

Questão 1 Dado um número natural arbitrário n , considere matrizes quadradas arbitrárias: A , B , C , pertencentes a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Nestas condições, indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

☐ a) Se $\det C \neq 0$ e $B = C^{-1}AC$, então $\det B = \det A$.

☐ b) Se $BA = CA$ e $\det A \neq 0$, então $B = C$.

☒ c) Se $A^2 = A$, então $\det A \neq 0$.

☐ d) A é invertível se, e só se, $\det A \neq 0$.

Questão 2

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, com $\det A = k > 0$.

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

- ☒ a $\det(2A) = 6k$.
- ☐ b Se $A \xrightarrow{l_3+(-2)l_2} B \xrightarrow{3l_1} C$, então $\det C = 3k$.
- ☐ c $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k$.
- ☐ d $\begin{vmatrix} \alpha a & -\alpha b & -\alpha c \\ -d & e & f \\ -g & h & i \end{vmatrix} = \alpha k$.

Questão 3 Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = b \wedge d = 2a\}$ e $G = \langle (1, 2, 1, 2), (0, 2, 2, 1), (-1, 2, 3, 0) \rangle$.

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

- ☐ a $\langle (1, 2, 1, 2) \rangle \subseteq F$.
- ☐ b $\dim(F \cap G) = 1$.
- ☐ c $G = \langle (1, 0, -1, 1), (0, 2, 2, 1) \rangle$.
- ☒ d $((1, 2, 1, 2), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui uma base de F .

Questão 4 Indique qual das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**:

- ☐ a Se (u_1, u_2, u_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$ e w é um vector não nulo de $\mathbb{R}^3$, então $(w + u_1, u_2, u_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ b O subespaço $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a+b = c+d\}$ de $\mathbb{R}^4$ é gerado pela sequência $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$.
- ☒ c Se F é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ de dimensão 1, então existe pelo menos vector (a, b) , não nulo, tal que $F = \{\lambda(a, b) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ d As outras três opções são falsas.

Questão 5 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e F e G subespaços de E .

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

- ☐ a Se (v_1, v_2) é uma base de E , $w_1 = \alpha v_1 + \beta v_2$, $w_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$ e $\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ é uma matriz invertível, então (w_1, w_2) é uma base de E .
- ☐ b Se $\mathcal{S}$ é uma sequência de vectores de E e $\mathcal{S}'$ é uma subsequência de $\mathcal{S}$ linearmente dependente, então $\mathcal{S}$ é linearmente dependente.
- ☐ c Se $\dim E = 10$, $\dim F = 8$ e $\dim G = 9$, então $\dim(F \cap G) \geq 7$.
- ☒ d Se $\dim F \leq \dim G$, então $F \subseteq G$.

RESPOSTAS CORRETAS

NÚMERO DE ALUNO: NOME:

Nas perguntas que se seguem justifique detalhadamente as suas respostas.

Questão 6 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

- a) Aplicando o Teorema de Laplace à segunda linha da matriz A , calcule $\det A$.
- b) Determine $A \operatorname{adj} A$.

NÚMERO DE ALUNO: NOME:

Nas perguntas que se seguem justifique detalhadamente as suas respostas.

Questão 7

Considere em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ os seguintes subespaços

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 3b = 0 \wedge b = c \right\} \quad \text{e} \quad G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

a) Indique para cada um dos subespaços, F e G , uma base.

b) Determine $\dim(F + G)$ e mostre que

$$F \cap G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

RESPOSTAS CORRETAS

NÚMERO DE ALUNO: NOME:

Nas perguntas que se seguem justifique detalhadamente as suas respostas.

Questão 8

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, seja $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear.

Consideremos a aplicação $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida do modo seguinte

$$f(u) = (f_1(u), \dots, f_m(u)).$$

- a) Mostre que f é uma aplicação linear.
- b) Mostre que $\text{Nuc } f = \text{Nuc } f_1 \cap \dots \cap \text{Nuc } f_m$.