Tópicos de resolução do segundo teste de ALGA E - 2014/2015

Questão 6: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$$

(a) Aplicando o Teorema de Laplace à segunda linha da matriz A, calcule $\det A$.

(b) Determine $A \operatorname{adj} A$.

Resposta:

(a) Aplicando o Teorema de Laplace à segunda linha da matriz A, obtemos

$$|A| = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} t| + 0(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Assim temos

$$|A| = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 60 = -56.$$

(b) De acordo com a matéria leccionada, sabemos que $A \operatorname{adj} A = |A|\ I_4$. Por outro lado, pela resolução da alínea anterior, temos que $|A| = -56$. Consequentemente,

$$A \operatorname{adj} A = |A|\ I_4 = (-56) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{bmatrix}$$

Questão 7: Considere em $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ os seguintes subespaços

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 3b = 0 \wedge b = c \right\} \quad \text{e} \quad G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

(a) Indique para cada um dos subespaços, F e G, uma base.

(b) Determine $\dim(F + G)$ e mostre que

$$F \cap G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Resposta:

(a) Neste contexto, temos

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a - 3b = 0 \wedge b = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3b & b \\ b & d \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por outro lado, para quaisquer $b, d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} 3b & b \\ b & d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do exposto resulta que

$$F = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Também é claro que, para quaisquer $b, d \in \mathbb{R}$,

$$b \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3b & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Consequentemente, aplicando o critério de independência linear, conclui-se que

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma sequência linearmente independente. Do exposto resulta que

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de F.
De acordo com o enunciado, temos

$$G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Por outro lado, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3\alpha & 4\alpha+\beta \\ \alpha & 3\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right. .$$

Assim, de acordo com o critério de independência linear, resulta que

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma sequência linearmente independente. Tendo em consideração que

$$G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

podemos concluir que

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de G.

(b) Fazendo uso dos resultados obtidos na alínea anterior, podemos concluir que

$$F + G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

conclui-se que

$$F + G = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3\alpha & \alpha+\gamma \\ \alpha & \beta+\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right. .$$

Aplicando o critério de independência linear, conclui-se que

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma sequência linearmente independente. Do exposto resulta que

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base de $F+G$ e por conseguinte $\dim(F+G) = 3$. Por outro lado, pelo teorema das dimensões, temos $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. Portanto $3 = 4 - \dim(F \cap G)$. Logo

$$\dim(F \cap G) = 1.$$

Também é claro que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in F \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G.$$

Consequentemente,

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \subseteq F \cap G.$$

Como

$$\dim\left(\left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle\right) = \dim(F \cap G) = 1$$

então

$$\left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = F \cap G.$$

Questão 8: Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Dado $m \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, seja $f_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear.

Consideremos a aplicação $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida do modo seguinte

$$f(u) = (f_1(u), \ldots, f_m(u)).$$

(a) Mostre que f é uma aplicação linear.

(b) Mostre que $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Nuc} f_m$.

Resposta:

(a) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^m$. Por definição de f, temos $f(u+v) = (f_1(u+v), \ldots, f_m(u+v))$. Como, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i é uma aplicação linear, então temos

$$f(u+v) = (f_1(u) + f_1(v), \ldots, f_m(u) + f_m(v)).$$

De acordo com a definição de adição no espaço vectorial $\mathbb{R}^m$, conclui-se que

$$f(u+v) = (f_1(u), \ldots, f_m(u)) + (f_1(v), \ldots, f_m(v)).$$

Por definição de f, sai que

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

Sejam $u \in \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Por definição de f, $f(\alpha u) = (f_1(\alpha u), \ldots, f_m(\alpha u))$. Como, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i é uma aplicação linear, então temos

$$f(\alpha u) = (\alpha f_1(u), \ldots, \alpha f_m(u)).$$

Por definição de multiplicação por um escalar, no espaço vectorial $\mathbb{R}^m$, conclui-se que

$$f(\alpha u) = \alpha(f_1(u), \ldots, f_m(u)).$$

Por definição de f, sai que

$$f(\alpha u) = \alpha f(u).$$

(b) Seja $u \in \operatorname{Nuc} f$. Por definição de núcleo, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^m}$. Por definição de f, temos

$$(f_1(u), \ldots, f_m(u)) = (0, \ldots, 0).$$

Consequentemente, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $f_i(u) = 0$. Portanto, por definição de núcleo, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $u \in \operatorname{Nuc} f_i$. Por definição de intersecção, temos

$$u \in \operatorname{Nuc} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Nuc} f_m.$$

Suponhamos que $u \in \operatorname{Nuc} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Nuc} f_m$. Por definição de intersecção, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $u \in \operatorname{Nuc} f_i$. Por definição de núcleo, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, temos $f_i(u) = 0$. Consequentemente,

$$(f_1(u), \ldots, f_m(u)) = (0, \ldots, 0).$$

Por definição de f, temos

$$f(u) = (0, \ldots, 0).$$

Portanto, por definição de núcleo, temos $u \in \operatorname{Nuc} f$.

Do exposto resulta que $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Nuc} f_m$.