Uma resolução do Exame de Recurso de AM1.

7/2/2011

Grupo 1

(a) Derivamos a função $f(x) = 2\arctan(x) - x$ e obtemos

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,.$$

O sinal da derivada é o sinal de $(1-x^2)$. Logo $f'(x) > 0$ se $x \in]-1,1[$ e $f'(x) < 0$ se $x \in \mathbb{R}/[-1,1]$. Concluímos que f é decrescente nos intervalos $]-\infty,-1]$ e $[1,+\infty[$ e crescente em $[-1,1]$. Nos pontos $x=-1$ e $x=1$ f tem respectivamente um mínimo relativo e um máximo relativo.

(b) (O gráfico deve ressaltar, para além da existência dos dois extremos relativos, a simetria ímpar da função e o facto das rectas paralelas $y = -x-\pi$ e $y = -x+\pi$ serem assímptotas oblíquas respectivamente em $-\infty$ e $+\infty$.)

Grupo 2

(a) Temos, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq (k+1)\,.$$

Tomando sucessivamente $k = 1, 2, ..., n$ escrevemos

$$2 \leq 2\,, \quad 2 \leq 3\,, ...\,, \quad 2 \leq (n+1)\,.$$

Logo, por comparação termo a termo,

$$2^n \leq 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n+1) = (n+1)!\,.$$

(b) A sucessão u_n é trivialmente crescente. Mostremos que é limitada. Pela alinea anterior,

$$\frac{1}{(j+1)!} \leq \frac{1}{2^j}$$

logo

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)!} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \leq 2\,.$$

Podemos pois concluir que u_n é convergente.

(c) O facto de u_n ser crescente implica que, para todo o n,

$$u_n \geq u_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Logo

$$\lim(1+u_n)^n \geq \lim(1+1/2)^n = +\infty\,.$$

Grupo 3

Escrevemos a fórmula de Taylor/MacLaurin com resto de Lagrange:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^{-c}}{3!}\,x^3$$

em que $c \in]0,x[$ (ou $c \in]x,0[$). Em particular, para $x \in]0,1[$,

$$\left|e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2\right| = \left|-\frac{e^{-c}}{3!}\,x^3\right| \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}\,.$$

Grupo 4

(a)

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan(x)\,dx = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -[\ln|\cos(x)|]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

(b) Efectuando a mudança de variável $x = \tan(t)$, calculamos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1}{\tan^2(t)\sqrt{1+\tan^2(t)}}\,\frac{1}{\cos^2(t)}dt =$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(t)\sqrt{1/\cos^2(t)}}dt = \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}dt = -\frac{1}{\sin(t)} + C\,.$$

Restituindo a variável original à expressão, obtemos como família de primitivas de f as funções

$$-\frac{1}{\sin(\arctan(x))} + C\,.$$

Atendendo à relação

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

também podemos escrever

$$f(x) = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C\,.$$

Grupo 5

A área da região pretendida pode ser calculada por

$$\int_{-a}^{a} a^2 - x^2\,dx = [a^2 x - \frac{1}{3}x^3]_{-a}^{a} = 2(a^3 - \frac{1}{3}a^3) = \frac{4}{3}a^3 = \frac{2}{3}bh\,,$$

em que $b = 2a$ e $h = a^2$. Arquimedes não usou este método.

Grupo 6

(a) Resolvendo

$$\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x} < e^{-x}$$

obtemos

$$e^x + 1 < (e^{2x} + 2e^x) \cdot e^{-x} = e^x + 2$$

ou seja, a condição é universal em $\mathbb{R}$.

(b)

$$\int_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} [-e^{-x}]_1^M = \lim_{M\to+\infty} e^{-1} - e^{-M} = e^{-1}\,.$$

(c) Pelo critério de comparação de integrais impróprios, temos

$$\int_{1}^{+\infty} g(x)\,dx \leq \int_{1}^{+\infty} e^{-x} = e^{-1} < 1\,.$$

Grupo 7

Escrevemos

$$x^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(x)}\,.$$

Temos

$$\lim_{x\to0^+} \sin(x)\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}\,.$$

Vericam-se as condições de aplicação da regra de Cauchy. Calculando o limite da razão das derivadas, obtemos:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{\sin(x)}{x}\tan(x) = 1 \cdot 0 = 0\,.$$

Pela continuidade da função exponencial podemos concluir

$$\lim_{x\to0^+} x^{\sin(x)} = e^0 = 1\,.$$