

Análise Matemática I C

Exame de Recurso 07/02/2011

Nota: Esta é apenas uma resolução, de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

- (a) Derivando a função $f(x) = 2 \arctan(x) - x$ obtemos:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1 = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

O sinal da derivada é determinado pelo sinal de $1 - x^2$. Logo $f'(x) > 0$ se $x \in]-1, 1[$ e $f'(x) < 0$ se $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Concluimos assim que f é decrescente nos intervalos $] -\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$ e crescente em $] -1, 1[$. Nos pontos $x = -1$ e $x = 1$ f tem, respectivamente, um mínimo relativo e um máximo relativo.

- (b) (O gráfico deve ressaltar, para além da existência dos dois extremos relativos, a simetria ímpar da função e o facto das rectas paralelas $y = -x - \pi$ e $y = -x + \pi$ serem assíntotas oblíquas respectivamente em $-\infty$ e $+\infty$. Da sua observação poder-se-ia concluir que o contradomínio da função é $\mathbb{R}$.)

Pergunta 2

- (a) Temos, para todo o $k \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq (k+1).$$

Tomando sucessivamente $k = 1, 2, \dots, n$ escrevemos

$$2 \leq 2, \quad 2 \leq 3, \dots, \quad 2 \leq (n+1).$$

Logo, por comparação termo a termo,

$$2^n \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1) = (n+1)!.$$

Mostremos que a sucessão $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada. Pela alínea anterior,

$$\frac{1}{(j+1)!} \leq \frac{1}{2^j}, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, para $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{(j+1)!} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} \leq 1.$$

(b) Atendendo a que

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{(j+1)!} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(j+1)!} = \frac{1}{(n+2)!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

concluimos que a sucessão é trivialmente crescente. Sendo $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão monótona e limitada, podemos concluir que também é convergente.

(c) O facto de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ser crescente implica que, para todo o n ,

$$u_n \geq u_1 = \frac{1}{2},$$

pelo que $\lim u_n \geq \frac{1}{2}$.

Assim,

$$\lim(1 + u_n)^n \geq \lim(1 + 1/2)^n = +\infty.$$

Pergunta 3

Consideremos um desenvolvimento em fórmula de MacLaurin, com resto de Lagrange de ordem 3, para a função e^{-x} :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{e^{-c}}{3!} x^3,$$

em que $c \in]0, x[$ (ou $c \in]x, 0[$). Em particular, para $x \in]0, 1[$,

$$\left| e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right| = \left| -\frac{e^{-c}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Pergunta 4

(a)

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan(x) dx = - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = -[\ln |\cos(x)|]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

(b) Efectuando a mudança de variável $x = \tan(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{1}{\tan^2(t) \sqrt{1+\tan^2(t)}} \frac{1}{\cos^2(t)} dt = \\ &= \int \frac{1}{\sin^2(t) \sqrt{1/\cos^2(t)}} dt = \int \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} dt = -\frac{1}{\sin(t)} + C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante real. Restituindo à expressão a variável original, obtemos como família de primitivas de f as funções

$$-\frac{1}{\sin(\arctan(x))} + C.$$

Atendendo à relação

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)},$$

também podemos escrever a família de primitivas de f como as funções

$$-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + C.$$

Pergunta 5

A área pretendida pode ser calculada por

$$\int_{-a}^a a^2 - x^2 dx = \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a = 2 \left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) = \frac{4}{3} a^3 = \frac{2}{3} bh,$$

em que $b = 2a$ e $h = a^2$. Nota-se que Arquimedes não usou este método para chegar à relação indicada.

Pergunta 6

(a) Resolvendo

$$\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x} < e^{-x}$$

obtemos

$$e^x + 1 < (e^{2x} + 2e^x) \cdot e^{-x} = e^x + 2,$$

que é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

(b)

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} e^{-1} - e^{-M} = e^{-1}.$$

(c) Atendendo a que pela alínea (a),

$$\frac{e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x} < e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R},$$

recorrendo ao critério geral de comparação de integrais impróprios, temos que

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1} < 1.$$

Pergunta 7

Comecemos por escrever

$$x^{\sin(x)} = e^{\sin(x) \ln(x)}.$$

Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}}.$$

Atendendo a que $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ são diferenciáveis em $]0, \frac{\pi}{2}[$ e a que $g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2(x)} \neq 0$ no mesmo intervalo, podemos concluir que se verificam as condições necessárias à aplicação da regra de Cauchy. Calculando o limite da razão das derivadas, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(x)}{x} \tan(x) = -1 \cdot 0 = 0.$$

A regra de Cauchy garante então que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) = 0.$$

Pela continuidade da função exponencial podemos concluir

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin(x)} = e^0 = 1.$$