FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Recurso — 7 de Fevereiro de 2011

1. (*3 val.*) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x) - x$.

   a) Determine os intervalos de monotonia e analise a existência de extremos relativos para a função.

   b) Utilizando a alínea anterior, esboce o gráfico da função, indicando o seu contradomínio.
   Nota: Não necessita de analisar a concavidade da função.

2. (*3 val.*) Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão de termo geral $u_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(j+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   a) Mostre que $2^n \leq (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}$. Utilizando o resultado anterior mostre que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

   b) Averigúe se a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

   c) Indique, justificando, o valor de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+u_n)^n$.

3. (*2,5 val.*) Utilizando a Fórmula de Taylor, mostre que

$$\left| e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2} \right| < \frac{1}{6}, \text{ desde que } 0 < x < 1.$$

4. (*3.5 val.*)

   a) Calcule o valor do integral

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{tg}(x)dx.$$

   b) Considerando a substituição $x = \operatorname{tg}(t)$, determine a família de primitivas da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

5. (*2,5 val.*) Arquimedes (287 a.C – 212 a.C.) provou que a área compreendida entre um arco de parábola e a respectiva base é igual a $\frac{2}{3}$ do produto do comprimento desta base pela altura. Considerando a figura geométrica limitada pelo arco de parábola de equação $y = a^2 - x^2$ e pelo eixo das abcissas, justifique a afirmação de Arquimedes.

6. (*3 val.*) Considere a função real de variável real definida por $g(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x}$.

   a) Mostre que $g(x) < e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) Determine $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$.

   c) Utilize as alíneas anteriores para provar que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}+2e^x}dx < 1$.

7. (*2.5 val.*) Calcule o valor do limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin(x)}.$$