Análise Matemática I C

Exame de Recurso - 13 de Fevereiro de 2012

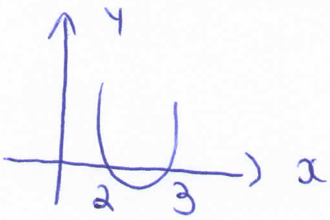
Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

a) $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{5\pm1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

$x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)<0$

Como a parábola que define a inequação tem concavidade voltada para cima, pois o coeficiente do termo de segundo grau é positivo, um esboço da situação pretendida encontra-se na figura seguinte:



Assim, $A=]2,3[$

b) $\text{int}(A\cup B)=]2,3[$

$\text{fr}(A\cup B)=\{1,2,3,5,7\}$

$(A\cup B)'=[2,3]$

e) Um conjunto é fechado sse for igual à sua aderência.

$A \cup B = [2,3[\cup \{1,5,7\}$

$\overline{A \cup B} = [2,3] \cup \{1,5,7\}$

Logo se considerarmos $C = \{3\}$,

$$A \cup B \cup C = [2,3] \cup \{1,5,7\} = \overline{A \cup B \cup C}$$

e C será o menor conjunto que satisfaz $A \cup B \cup C$ é fechado.

Pergunta 2

a) $$\lim \left(\frac{2^n+1}{2^n-3}\right)^{3^n} = \lim \left(\frac{2^n-3+4}{2^n-3}\right)^{3^n} =$$

$$= \lim \left[\left(1+\frac{4}{2^n-3}\right)^{2^n-3}\right]^{\frac{3^n}{2^n-3}}$$

Como

$$\lim \frac{3^n}{2^n-3} = \lim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2^n}} = +\infty \quad \text{e}$$

$$\lim \left(1+\frac{4}{2^n-3}\right)^{2^n-3} = e^4,$$

concluímos que

$$\lim \left(\frac{2^n+1}{2^n-3}\right)^{3^n} = +\infty$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \times n^2 = \frac{1}{\sqrt{2n^2}} n^2 = \frac{n}{\sqrt{2}}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Atendendo a que $\lim \frac{n}{\sqrt{2}} = +\infty$ podemos concluir que

$$\lim \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = +\infty$$

<u>Pergunta 3</u>

a) A função $x e^x$ está sempre bem definida, logo o mesmo sucede quando $x \leq 0$.

A função $x \log^2(x)$ só está bem definida se $x > 0$, o que é o caso.

Assim o domínio de f é $\mathbb{R}$.

Analisemos agora a continuidade da função.

Para $x < 0$ f é contínua pois é definida pelo produto de duas funções contínuas (um polinómio e uma exponencial).

Para $x>0$, f é contínua pois resulta do produto de duas funções contínuas (um polinómio e a composta de duas funções contínuas x^2 e $\log x$).

Para $x=0$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} x e^{x} = 0\times 1 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\log^2(x) \underset{x=e^{-t}}{=} \lim_{t\to+\infty} e^{-t}\left[\log(e^{-t})\right]^2 =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$, atendendo à velocidade de crescimento dos polinómios e da função exponencial.

Como

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\leq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$$ podemos concluir que f é contínua em $x=0$.

$\therefore$ A função é contínua em $\mathbb{R}$.

b)

Para $x<0$, f é diferenciável pois resulta do produto de duas funções diferenciáveis (uma exponencial e um polinómio).

Temos então:

$$f'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

Para $x>0$, f é diferenciável pois resulta do produto de duas funções diferenciáveis (um polinómio e a composta de duas funções diferenciáveis x^2 e $\log x$). Temos então:

$$f'(x) = (x\log^2(x))' = \log^2(x) + x\,2\log x\,\frac{1}{x} =$$
$$= \log^2(x) + 2\log x = \log x(\log x + 2)$$

Para $x=0$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}\log^2(x)}{\cancel{x}} = +\infty,$$ logo f não é diferenciável em $x=0$.

$$\therefore f \text{ é diferenciável em } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

e) Os candidatos a extremos locais da função correspondem aos zeros da primeira derivada. Comecemos por determiná-los.

Para $x<0$:

$$(1+x)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Para $x>0$:

$$\log x(\log x + 2) = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \vee \log x = -2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-2}$$

Assim

		-1		0		e^{-2}		1	
$(1+x)e^x$	$-$	0	$+$						
$\log x(\log x+2)$					$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Atendendo a que a função é contínua em $x=0$ e crescente quer à sua direita, quer à sua esquerda podemos concluir que:

$x=0$ não é ponto de extremo local

$x=-1$ e $x=1$ são pontos de mínimo local

$x=e^{-2}$ é ponto de máximo local

f é decrescente em $]-\infty,-1[$ e $]e^{-2},1[$

f é crescente em $]-1,e^{-2}[$ e $]1,+\infty[$

d)

Começamos por determinar a expressão que define a segunda derivada da função:

$$\left((1+x)e^x\right)' = e^x + (1+x)e^x = e^x(2+x)$$

$$\left(\log^2 x + 2\log x\right)' = 2\log x\,\frac{1}{x} + 2\,\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\log x+1)$$

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x}(2+x) & , \ x<0 \\ \frac{2}{x}(\log x + 1) & , \ x>0 \end{cases}$$

Os candidatos a pontos de inflexão serão os zeros da segunda derivada de f. Assim:

$$e^{x}(2+x)=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$\frac{2}{x}(\log x+1)=0 \Leftrightarrow \log x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$$

Analisemos o sinal da segunda derivada:

		-2		0		e^{-1}	
$e^{x}(2+x)$	$-$	0	$+$				
$\frac{2}{x}(\log x+1)$					$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

Podemos então concluir que f tem:

concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2[\ \cup \ ]0,e^{-1}[$

concavidade voltada para cima em $]-2,0[\ \cup \ ]e^{-1},+\infty[$

pontos de inflexão em $x=-2$ e $x=e^{-1}$, pois f é diferenciável nestes dois pontos.

No ponto $x=0$ existe mudança do sentido da concavidade da função e há continuidade da função neste ponto. Contudo, pela alínea b) sabemos que

8

$f'_d(0) = +\infty$ e $f'_e(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cancel{x} e^x}{\cancel{x}} = 1$

logo f não é derivável em $x = 0$. Assim, f não tem um ponto de inflexão em $x = 0$

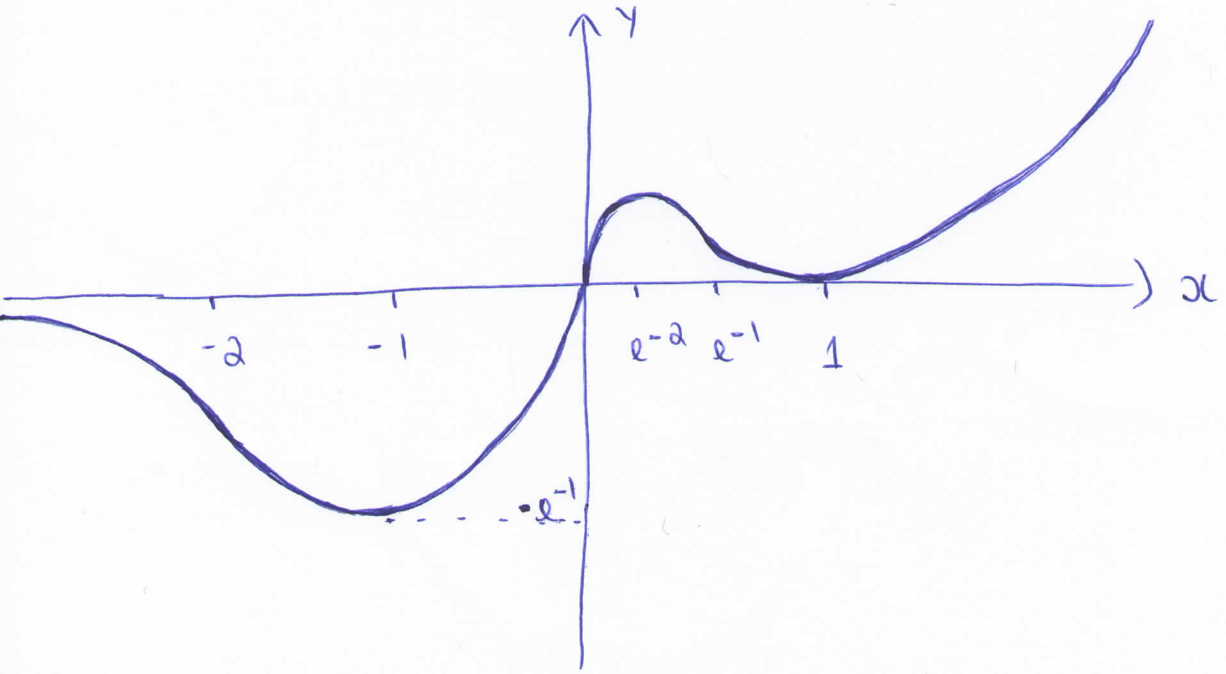
e)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{t \to +\infty} -t e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t}{e^t} = 0$$

$x = -t$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \log^2 x = +\infty$$

Atendendo aos resultados das alíneas anteriores e aos dois limites calculados obtemos o seguinte esboço do gráfico da função:



Assim o contradomínio de f será $[-e^{-1}, +\infty[$.

Pergunta 4

$$\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{\arcsin x}}$$ conduz a uma indeterminação do tipo 1^{∞}

$$\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{\arcsin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log\left((x+1)^{\frac{1}{\arcsin x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(x+1)}{\arcsin x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\arcsin x}}$$

porque a função exponencial é contínua

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\log(x+1)-\log(0+1)}{x}}{\frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{0+1}}{\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}} = 1$$

$$(\log(x+1))' = \frac{1}{x+1}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Assim $\lim_{x\to 0} (x+1)^{\frac{1}{\arcsin x}} = e^{1} = e$

Pergunta 5

Comecemos por mostrar que se $n=1$ a condição se transforma numa proposição verdadeira.

$$f'(x) = (x e^{2x})' = e^{2x} + x\, 2 e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$$

$$= 2^{1-1} e^{2x}(1+2x) \rightarrow \text{proposição verdadeira}$$

Suponhamos agora que para um certo n temos uma proposição verdadeira e mostremos que o mesmo sucede para o natural seguinte.

Hipótese: $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} e^{2x}(n+2x)$

Tese: $f^{(n+1)}(x) = 2^{n} e^{2x}(n+1+2x)$

Prova da tese:

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{por hipótese} \\ \text{de indução}}}{=} \left[2^{n-1} e^{2x}(n+2x)\right]' =$$

$$= 2^{n-1}\left(e^{2x}(n+2x)\right)' = 2^{n-1}\left(e^{2x} 2 (n+2x) + e^{2x} 2\right) =$$

$$= 2^{n-1}\, 2\, e^{2x}(n+2x+1) = 2^{n} e^{2x}(n+1+2x)$$

$$\therefore\ f^{(n)}(x) = 2^{n-1} e^{2x}(n+2x),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Pela alínea anterior sabemos que $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, pelo que é possível escrever para f uma fórmula de Taylor de qualquer ordem, em torno de qualquer ponto. Assim, para $a=1$ vem:

$$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + \cdots + \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(1) +$$

$$+ \frac{(x-1)^n}{n!} f^{(n)}(c) \quad , \text{com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

Logo

$$x e^{2x} = e^2 + (x-1)\, 3e^2 + \frac{(x-1)^2}{2} (2e^2 4) + \cdots + \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} 2^{n-2} e^2 (n-1+2)$$

$$+ \frac{(x-1)^n}{n!} 2^{n-1} e^{2c} (n+2c) =$$

$$= e^2 + 3e^2(x-1) + 4e^2(x-1)^2 + \cdots + \frac{2^{n-2}(n+1)}{(n-1)!} e^2 (x-1)^{n-1}$$

$$+ \frac{2^{n-1} e^{2c} (n+2c)}{n!} (x-1)^n \quad , \text{com } c \text{ entre } 1 \text{ e } x$$

a)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2 x}{tg\, x + 2}\, dx = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{1+t^2}}{t+2} \, \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^1 \frac{1+t^2+1}{(t+2)(1+t^2)^2}\, dt$$

$$tg\, x = t \Leftrightarrow x = arctg\, t = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x + sen^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow t = tg\, 0 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = tg \frac{\pi}{4} = 1$$

Assim o integral inicial converte-se em

$$\int_0^1 \frac{t^2+2}{(t+2)(t^2+1)^2}\, dt$$

que é efectivamente o integral de uma função racional.

b)

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)^2}\,dx$$ é o integral de uma função racional.

Começamos por decompor a função integranda na soma de funções racionais mais simples.

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + B(x-2) + C(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

Para haver igualdade entre os dois quocientes, basta que:

$$x^2+1 = A(x-1)^2 + B(x-2) + C(x-1)(x-2)$$

Quando $x=1$ temos:

$$2 = -B \Leftrightarrow B = -2$$

Se $x=2$ vem:

$$5 = A$$

Para $x=0$ temos:

$$1 = 5+4+2C \Leftrightarrow -8 = 2C \Leftrightarrow C = -4$$

Assim:

$$\int \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{5}{x-2} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-1}\,dx =$$

$= 5 \log|x-2| + \frac{2}{x-1} - 4\log|x-1| + c$, com c uma constante real.

Recorrendo à Regra de Barrow temos

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)^2}\,dx = \left[5\log|x-2| + \frac{2}{x-1} - 4\log|x-1|\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 5\log 2 - 2 - 5\log 3 + 1 + 4\log 2 = 9\log 2 - 5\log 3 - 1$$

e) Recorrendo à técnica de primitivação por partes vem:

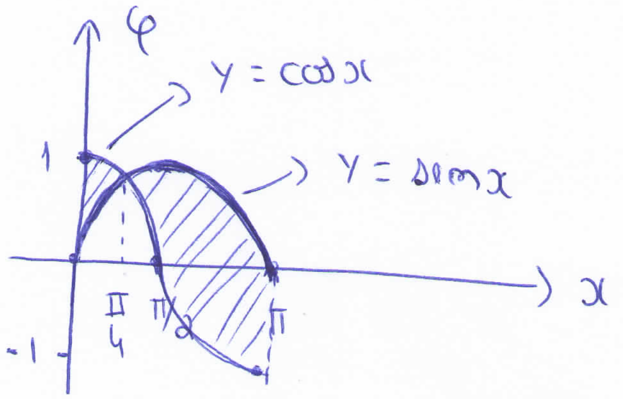
$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - \int 2\operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + c,$$ com c uma constante real.

Pergunta 7

Comecemos por esboçar o gráfico das funções no domínio indicado:



O valor associado à área em causa é dado por

$$\int_0^{\pi/4} \cos x - \operatorname{sen} x \, dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \operatorname{sen} x - \cos x \, dx =$$

$$= \left[\operatorname{sen} x + \cos x\right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Pergunta 8

$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(x^3+1)\sqrt{x}} \, dx$ é um integral impróprio de primeira espécie, já que o domínio de integração é um intervalo ilimitado, mas a função integranda é contínua em $[1, +\infty[$. Nota-se que

$(x^3+1)\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 0$, que não pertencem ao intervalo $[1, +\infty[$.

$$0 \leq \frac{x-1}{(x^3+1)\sqrt{x}} \underset{\downarrow}{\leq} \frac{x}{x^3+1} \leq \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}, \forall x \in [1, +\infty[$$

pois $\sqrt{x} \geq 1, \forall x \in [1, +\infty[$

Como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ é convergente, o critério geral de comparação permite-nos concluir que $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(x^3+1)\sqrt{x}} \, dx$ é convergente, sendo a sua convergência absoluta.