

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Recurso — 13 de Fevereiro de 2012

1. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\}$ e $B = \{1, 2, 5, 7\}$.

(a) [0.5 val.] Mostre que $A =]2, 3[$.

Resposta: $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$, portanto, $A =]2, 3[$.

(b) [0.5 val.] Determine o interior, fronteira e derivado do conjunto $A \cup B$.

Resposta: O conjunto $A \cup B =]2, 3[\cup \{1, 2, 5, 7\} = [2, 3[\cup \{1, 5, 7\}$. Então

$$\text{int}(A \cup B) =]2, 3[,$$

$$\text{fr}(A \cup B) = \{1, 2, 3, 5, 7\},$$

$$(A \cup B)' = [2, 3].$$

(c) [0.5 val.] Determine o menor conjunto C tal que $A \cup B \cup C$ é fechado.

Resposta: $C = \{3\}$.

2. Calcule o valor dos seguintes limites:

(a) [1.5 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n + 1}{2^n - 3} \right)^{3^n}$;

Resposta:

$$\begin{aligned}
 \lim \left(\frac{2^n + 1}{2^n - 3} \right)^{3^n} &= \lim \left(\frac{2^n \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)}{2^n \left(1 - \frac{3}{2^n} \right)} \right)^{3^n} = \lim \left(\frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{3}{2^n}} \right)^{3^n} \\
 &= \lim \left(\left(\frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{3}{2^n}} \right)^{2^n} \right)^{\frac{3^n}{2^n}} = \lim \left(\left(\frac{1 + \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{3}{2^n}} \right)^{2^n} \right)^{\left(\frac{3}{2} \right)^n} \\
 &= \left(\frac{e}{e^{-3}} \right)^{+\infty} = (e^4)^{+\infty} = +\infty.
 \end{aligned}$$

(b) [1.0 val.] $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

Resposta: O número de parcelas no somatório é $n^2 - 1 + 1 = n^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} &= \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \\ &= n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+2}} = \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{\sqrt{n^2+2}}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^2+2}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}\end{aligned}$$

Temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = +\infty,$$

pela desigualdade anterior podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = +\infty.$$

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x e^x, & \text{se } x \leq 0 \\ x \log^2(x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(a) [0.5 val.] Determine o domínio de f e estude a sua continuidade.

Resposta:

O domínio de f é o conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \vee x > 0\} = \mathbb{R}.$$

Se $x < 0$, f é contínua por ser definida pelo produto de um polinómio por uma função exponencial que sabemos serem contínuas em $\mathbb{R}$.

Se $x > 0$, f é contínua por ser definida pelo produto de um polinómio por uma potência da função logarítmica que sabemos serem contínuas em $\mathbb{R}^+$.

Em $x = 0$ vamos estudar os limites laterais:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log^2(x).\end{aligned}$$

No cálculo deste limite, surge a indeterminação $0 \times \infty$ que podemos transformar numa indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, obtendo-se o valor zero para este limite. Dado que estes limites são iguais e iguais a $f(0)$, f é contínua em $x = 0$. Podemos concluir que f é contínua no seu domínio.

- (b) [1.0 val.] Estude a diferenciabilidade de f .

Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada de f .

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(1+x), & \text{se } x < 0 \\ \log(x)(\log(x)+2), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

No ponto $x = 0$ temos

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log^2(x) = +\infty$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1,$$

portanto, não existe $f'(0)$.

- (c) [1.0 val.] Determine os extremos e estude a monotonia de f .

Resposta:

Para estudar os intervalos de monotonia de f e os seus extremos vamos estudar o sinal da derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (e^x(1+x) = 0 \wedge x < 0) \vee (\log(x)(\log(x)+2) = 0 \wedge x > 0) \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = e^{-2} \end{aligned}$$

		-1		0		e^{-2}		1	
$f'(x)$	-	0	+		+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Podemos concluir que f é crescente nos intervalos $] -1, 0[$, $]0, e^{-2}[$ e $]1, +\infty[$, decrescente nos intervalos $] -\infty, -1[$ e $]e^{-2}, 1[$; tem um mínimo em $x = -1$ (isto é, $f(-1) = -e^{-1}$ é um mínimo relativo de f), um mínimo em $x = 1$ (isto é, $f(1) = 0$ é um mínimo relativo de f) e um máximo em $x = e^{-2}$ (isto é, $f(e^{-2}) = 4e^{-2}$ é um máximo relativo de f).

- (d) [1.0 val.] Determine os pontos de inflexão e estude o sentido das concavidades de f .

Resposta:

Para estudar as concavidades e os pontos de inflexão de f fazemos o estudo da segunda derivada:

$$f''(x) = \begin{cases} e^x(x+2), & \text{se } x < 0 \\ \frac{2}{x}(\log(x)+1), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2 = 0 \wedge x < 0) \vee (\log(x)+1 = 0 \wedge x > 0) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = e^{-1}.$$

		-2		0		e^{-1}	
$f''(x)$	-		+		-		+
$f(x)$	$\cap$	$-2e^{-2}$	$\cup$	0	$\cap$	e^{-1}	$\cup$

Podemos concluir que f tem a concavidade voltada para baixo nos intervalos $] -\infty, -2[$ e $]0, e^{-1}[$, e voltada para cima nos intervalos $] -2, 0[$ e $]e^{-1}, +\infty[$. Tem pontos de inflexão em $x = -2$ e em $x = e^{-1}$.

(e) [0.5 val.] Determine o contradomínio de f .

Resposta:

Se $x > 0$, a função f é contínua e não negativa, tem um mínimo relativo $f(1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, portanto, $\mathbb{R}^+$ está contido no contradomínio.

Se $x \leq 0$, a função f é menor ou igual a zero, tem um mínimo relativo $f(-2) = -2e^{-2}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Como a função é contínua, decrescente até atingir o mínimo e crescente até zero, o contradomínio contém o intervalo $[-2e^{-2}, 0]$.

Pocemos concluir que o contradomínio é o conjunto $[-2e^{-2}, +\infty[$.

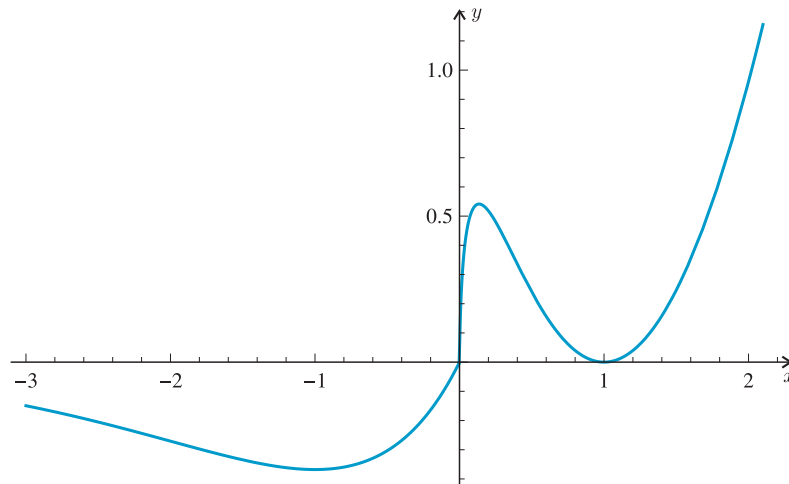


Figura 1: O gráfico da função do exercício 3.

4. [2.0 val.] Calcule, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{\arcsen(x)}}.$$

Resposta: (Notemos que o maior intervalo em que podemos trabalhar que seja uma vizinhança de zero é o intervalo $] -1, 1[$.) Ao calcular o limite pretendido surge a indeterminação 1^∞ . Mas

$$(x+1)^{\frac{1}{\arcsen(x)}} = e^{\log \left((x+1)^{\frac{1}{\arcsen(x)}} \right)} = e^{\frac{1}{\arcsen(x)} \cdot \log(x+1)} = e^{\frac{\log(x+1)}{\arcsen(x)}}$$

portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{\arcsen(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{\arcsen(x)}}.$$

Sejam $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = \arcsen(x)$. Consideremos o intervalo $] -1, 1[$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

portanto, ao calcular o limite pretendido obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Ambas as funções são diferenciáveis tendo-se $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ e $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Além disso, $g'(x) \neq 0, \forall x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$. Aplicando a regra de Cauchy obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{\arcsen(x)}} = e,$$

pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = 1.$$

5. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x e^{2x}$.

(a) [1.5 val.] Usando o Princípio de Indução Matemática, prove que

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} e^{2x} (n + 2x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Resposta: (O ponto chave nesta questão é identificar que a derivada de ordem $n+1$ é a derivada da derivada de ordem n)

Se $n = 1$ na fórmula indicada obtemos $f'(x) = 2^{1-1} e^{2x} (1 + 2x) = e^{2x} (1 + 2x)$.

Derivando a função f directamente obtemos $f'(x) = (x e^{2x})' = e^{2x} + 2x e^{2x} = (1 + 2x) e^{2x}$.

As duas expressões coincidem o que significa que a igualdade é válida para $n = 1$.

Hipótese de Indução: $f^{(n)}(x) = 2^{n-1} e^{2x} (n + 2x)$.

Tese de Indução: $f^{(n+1)}(x) = 2^n e^{2x} (n + 1 + 2x)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = (2^{n-1} e^{2x} (n + 2x))' = 2^{n-1} (2 e^{2x} (n + 2x) + 2 e^{2x}) \\ &= 2^{n-1} 2 e^{2x} (n + 2x + 1) = 2^n e^{2x} (n + 1 + 2x). \end{aligned}$$

Pelo Princípio de Indução Matemática podemos concluir que $a_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) [1.5 val.] Escreva a fórmula de Taylor de f , em torno do ponto $a = 1$, com resto de Lagrange de ordem n .

Resposta: Como f é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ podemos escrever a sua fórmula de Taylor de qualquer ordem em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$. Em particular, se $a = 1$, existe c entre 1 e x tal que

$$f(x) = f(1) + f'(1) (x - 1) + f''(1) \frac{(x - 1)^2}{2!} + f'''(1) \frac{(x - 1)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(c) \frac{(x - 1)^n}{n!}.$$

Pela alínea a) sabemos a expressão geral das derivadas de f , portanto, só precisamos de as substituir na fórmula anterior.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x} (1 + 2x) & \Rightarrow f'(1) &= 3 e^2 \\ f''(x) &= 2 e^{2x} (2 + 2x) & \Rightarrow f''(1) &= 8 e^2 \\ f'''(x) &= 2^2 e^{2x} (3 + 2x) & \Rightarrow f'''(1) &= 20 e^2 \\ \vdots & & \vdots & \\ f^{(n)}(x) &= 2^{n-1} e^{2x} (n + 2x) & \Rightarrow f^{(n)}(c) &= 2^{n-1} e^{2c} (n + 2c) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x e^{2x} &= e^2 + 3 e^2 (x - 1) + 8 e^2 \frac{(x - 1)^2}{2!} + 20 e^2 \frac{(x - 1)^3}{3!} + \dots + 2^{n-1} e^{2c} (n + 2c) \frac{(x - 1)^n}{n!} \\ &= e^2 + 3 e^2 (x - 1) + 4 e^2 (x - 1)^2 + \frac{10}{3} e^2 (x - 1)^3 + \dots + \frac{2^{n-1}}{n!} e^{2c} (n + 2c) (x - 1)^n \end{aligned}$$

com c entre 1 e x .

6. (a) [0.5 val.] Sem resolver o integral, mostre que usando a substituição $\operatorname{tg}(x) = t$ o integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos^2(x)}{\operatorname{tg}(x) + 2} dx$$

se converte no integral de uma função racional.

Resposta: Fazendo a substituição $\operatorname{tg}(x) = t$, isto é, $x = \varphi(t) = \arctg(t)$, temos $\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Como $\varphi^{-1}(0) = \operatorname{tg}(0) = 0$ e $\varphi^{-1}(\frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$, o intervalo de integração é $[0, 1]$. Além disso, $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Então

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos^2(x)}{\operatorname{tg}(x) + 2} dx &= \int_0^1 \frac{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{t + 2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{1+t^2}}{t + 2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\frac{2+t^2}{1+t^2}}{t + 2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2+t^2}{(t+2)(1+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

e a função integranda é uma função racional.

- (b) [1.5 val.] Calcule

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x-1)^2} dx.$$

Resposta: A função integranda é uma função racional em que o denominador tem dois zeros reais, $x = 2$ e $x = 1$, o primeiro com multiplicidade 1 e o segundo com multiplicidade 2. Em consequência,

$$\frac{x^2 + 1}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1},$$

com A , B e C constantes a determinar. Reduzindo ao mesmo denominador temos

$$\frac{x^2 + 1}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-2) + C(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

e pelo método dos coeficientes indeterminados obtemos os valores $A = 5$, $B = -2$ e $C = -4$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x-1)^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{5}{x-2} dx + \int_{-1}^0 \frac{-2}{(x-1)^2} dx + \int_{-1}^0 \frac{-4}{x-1} dx \\ &= 5 \left[\log |x-2| \right]_{-1}^0 + 2 \left[\frac{1}{x-1} \right]_{-1}^0 - 4 \left[\log |x-1| \right]_{-1}^0 \\ &= 5 \left(\log(2) - \log(3) \right) + 2 \left(-1 + \frac{1}{2} \right) - 4 \left(\log(1) - \log(2) \right) \\ &= 5 \log \left(\frac{2}{3} \right) - 1 + 4 \log(2). \end{aligned}$$

(c) [1.0 val.] Determine a primitiva de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$.

Resposta: Fazendo duas primitivações por partes obtemos

$$\begin{aligned} P x^2 \operatorname{sen}(x) &= -x^2 \cos(x) - P(-2x \cos(x)) \\ &= -x^2 \cos(x) + P 2x \cos(x) \\ &= -x^2 \cos(x) + 2(x \operatorname{sen}(x) - P \operatorname{sen}(x)) \\ &= -x^2 \cos(x) + 2x \operatorname{sen}(x) + 2 \cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7. [2.0 val.] Calcule o valor da área do domínio plano limitado pelas funções

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \cos(x),$$

com $0 \leq x \leq \pi$.

Resposta:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x)) dx \\ &= \left[\operatorname{sen}(x) + \cos(x) \right]_0^{\pi/4} + \left[-\cos(x) - \operatorname{sen}(x) \right]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 + 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

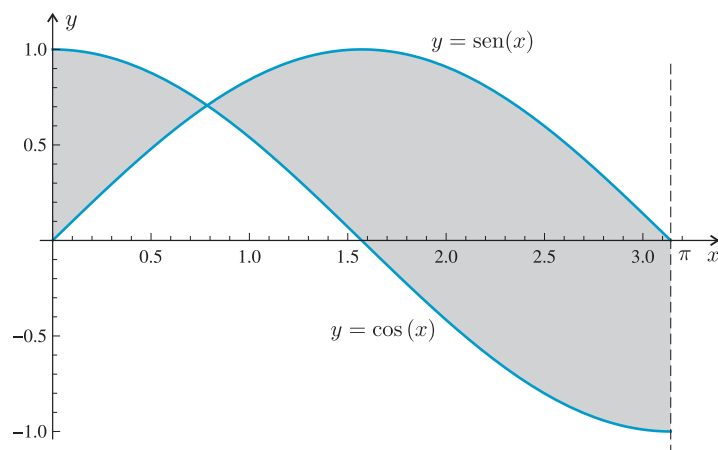


Figura 2: O domínio limitado do exercício 7.

8. [2.0 val.] Estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{(x^3+1)\sqrt{x}} dx.$$

Resposta: A função integranda é contínua no seu domínio, $\mathbb{R}^+$. Como o intervalo de integração é $[1, +\infty[$ este integral é impróprio de primeira espécie. Consideremos o integral impróprio de primeira espécie convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}} dx$.

O limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x-1}{(x^3+1)\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{5/2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)x^{5/2}}{(x^3+1)\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{7/2} - x^{5/2}}{x^{7/2} + x^{1/2}} = 1$$

é finito e diferente de zero, o que implica que os dois integrais têm a mesma natureza, portanto, o integral em estudo é convergente.