FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B, C, D e E)

Exame de Recurso — 13 de Fevereiro de 2012

1. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 < 0\}$ e $B = \{1, 2, 5, 7\}$.

   (a) **[0.5 val.]** Mostre que $A =]2, 3[$.

   (b) **[0.5 val.]** Determine o interior, fronteira e derivado do conjunto $A \cup B$.

   (c) **[0.5 val.]** Determine o menor conjunto C tal que $A \cup B \cup C$ é fechado.

2. Calcule o valor dos seguintes limites:

   (a) **[1.5 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n + 1}{2^n - 3}\right)^{3^n}$;

   (b) **[1.0 val.]** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^x, & \text{se } x \leq 0 \\ x\, \log^2(x), & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de f e estude a sua continuidade.

   (b) **[1.0 val.]** Estude a diferenciabilidade de f.

   (c) **[1.0 val.]** Determine os extremos e estude a monotonia de f.

   (d) **[1.0 val.]** Determine os pontos de inflexão e estude o sentido das concavidades de f.

   (e) **[0.5 val.]** Determine o contradomínio de f.

4. **[2.0 val.]** Calcule, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} \left(x + 1\right)^{\frac{1}{\operatorname{arcsen}(x)}}.$$

V. S. F. F.

5. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x\, e^{2x}$.

(a) **[1.5 val.]** Usando o Princípio de Indução Matemática, prove que

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\, e^{2x}\, (n + 2x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) **[1.5 val.]** Escreva a fórmula de Taylor de f, em torno do ponto $a = 1$, com resto de Lagrange de ordem n.

6. (a) **[0.5 val.]** Sem resolver o integral, mostre que usando a substituição $\operatorname{tg}(x) = t$ o integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos^2(x)}{\operatorname{tg}(x) + 2}\, dx$$

se converte no integral de uma função racional.

(b) **[1.5 val.]** Calcule

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^2 + 1}{(x-2)(x-1)^2}\, dx.$$

(c) **[1.0 val.]** Determine a primitiva de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$.

7. **[2.0 val.]** Calcule o valor da área do domínio plano limitado pelas funções

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \ \text{ e } \ g(x) = \cos(x),$$

com $0 \leq x \leq \pi$.

8. **[2.0 val.]** Estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - 1}{(x^3 + 1)\sqrt{x}}\, dx.$$