Exame de Recurso de

Análise Matemática I C

17/07/2012

Nota: Esta é apenas uma resolução de entre muitas outras possíveis.

Pergunta 1

a) Comecemos por resolver a inequação

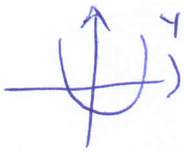
$$\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^2-x-2}<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0 \wedge |x|\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)<0 \wedge x\neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in \left]-1,0\right[\cup \left]0,2\right[$$

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$



Logo $A=\left]-1,0\right[\cup\left]0,2\right[$, pelo que

$\text{int}(A)=\left]-1,0\right[\cup\left]0,2\right[$ e

$A'=[-1,2]$.

b) $\{x: x \text{ é majorante de } A\}=[2,+\infty[$

$\{x: x \text{ é minorante de } A\}=\left]-\infty,-1\right]$

Pergunta 2

a)

$$\lim \log\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right) = \lim \log\left(\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3+1}\right)\frac{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}\right)$$

$$= \lim \log\left(\frac{\cancel{n^3}+2-\cancel{n^3}-1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}\right) = \lim \log\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n^3+1}}\right) = -\infty$$

b)

$$\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim \frac{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)\,\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(n+1)\,\cancel{n!}\,(n+1)\,\cancel{(2n)!}}$$

$$= \lim \frac{2(2n+1)}{n+1} = \lim \frac{2\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}} = 4$$

Logo

$$\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4$$

Pergunta 3

a) Atendendo a que a exponencial está bem definida em $\mathbb{R}$ e que $x^2+1 \neq 0$ é uma condição universal em $\mathbb{R}$, podemos concluir que $D_f = \mathbb{R}$.

Para $x<0$, f é contínua pois é definida pela função exponencial, que é contínua em $\mathbb{R}$.

Para $x>0$, f é contínua pois é definida pelo quociente de duas funções polinomiais, ambas contínuas em $\mathbb{R}$.

Para $x=0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x\geq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x\geq 0}} \frac{x^2 - x + 1}{x^2+1} = 1$$

Atendendo a que os dois limites anteriores são iguais, podemos concluir que f é contínua para $x=0$.

$\therefore$ f é contínua em $\mathbb{R}$

b)

Para $x<0$, f é diferenciável pois é definida à custa da função exponencial, que é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Para $x>0$, f é diferenciável pois é definida pelo quociente de duas funções polinomiais, diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

Para $x=0$

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^2-x+1}{x^2+1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x^2}-x+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -1 = -1$$

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^0}{x-0} = e^0 = 1$$

Como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$, f não é derivável, nem diferenciável em $x=0$.

$\therefore$ f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $(e^x)' = e^x$

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+1} \right)' = \frac{(x^2+1)(2x-1) - (x^2-x+1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}-x^2-1 - \cancel{2x^3}+2x^2-\cancel{2x}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Analisemos o seu sinal para estudar a monotonia e a existência de extremos para f.

		0		1	
e^x	$+$				
$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$			$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, 0[$ e $]1, +\infty[$

f é decrescente em $]0, 1[$

Atendendo à monotonia da função e a que f é contínua em $x=0$ e $x=1$, podemos concluir que f tem um máximo local em $x=0$ e um mínimo local em $x=1$.

d) Comecemos por determinar a segunda derivada de f.

$$f''(x) = \begin{cases} e^x & , x < 0 \\ \dfrac{2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3} & , x > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(x^2+1)^2 2x - (x^2-1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1 - 2x^2+2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Analisemos o seu sinal para concluir acerca do sentido das concavidades de f.

		0		$\sqrt{3}$	
e^x	+				
$\frac{2x(-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$			+	0	−
$f''(x)$	+		+	0	−
$f(x)$	∪		∪		∩

f tem a concavidade voltada para cima em

$]-\infty, 0[\cup]0, \sqrt{3}[$

f tem a concavidade voltada para baixo em

$]\sqrt{3}, +\infty[$

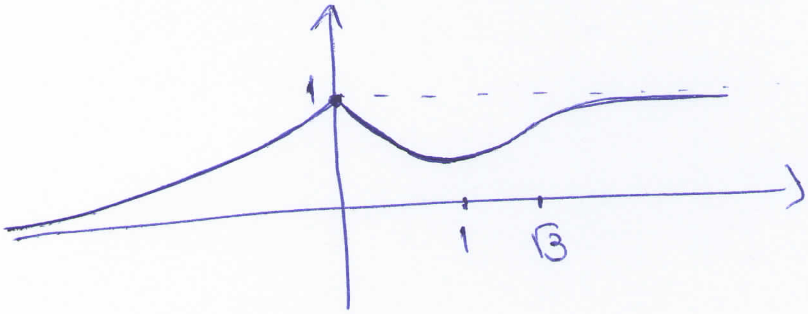
f tem um ponto de inflexão em $x = \sqrt{3}$.

e) Com vista a esboçar o gráfico de f determinemos o seu limite para $\pm\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

Esbocemos o gráfico da função.



$$f(1) = \frac{1 - 1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3 - \sqrt{3} + 1}{3 + 1} = \frac{4 - \sqrt{3}}{4}$$

A análise do esboço do gráfico da função permite-nos concluir que $D' =]0, 1]$

Pergunta 4

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2\arcsin x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2\arcsin x}{x}}$$

Atendendo a que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{2\arcsin x}\right)^{1/x} = e^{2\cdot 1} = e^2$$

Pergunta 5

a) e^{x^2} tem domínio $\mathbb{R}$.

Para que $\sqrt{\log t}$ esteja bem definida

$$\log t \geq 0 \wedge t > 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \wedge t > 0 \Leftrightarrow t \geq 1$$

Atendendo aos extremos de integração podemos concluir que:

$t \in [e, e^{x^2}]$ se $e^{x^2} \geq e > 1$ logo neste caso $\sqrt{\log t}$ estará sempre bem definida

ou

$t \in [e^{x^2}, e]$ se $e^{x^2} < e$. Neste caso $e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$, o que é uma condição universal em $\mathbb{R}$.

Assim,

$$Df = \mathbb{R}.$$

b) Atendendo a que para a variação de t considerado, $\sqrt{\log t}$ é uma função contínua, pois resulta da composta de duas funções contínuas, o Teorema Fundamental do Cálculo Integral e a regra de derivação da função composta permitem-nos concluir que

$$f'(x) = \sqrt{\log(e^{x^2})} \cdot e^{x^2} 2x = \sqrt{x^2}\, e^{x^2} 2x = |x| e^{x^2} 2x =$$

$$\underset{x>0}{=} 2x^2 e^{x^2}$$

$$f''(x) = 4x\, e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} 2x = e^{x^2}(4x + 4x^3)$$

$$f'''(x) = e^{x^2}(4 + 12x^2) + (4x + 4x^3) e^{x^2} 2x =$$

$$= e^{x^2}(4 + 12x^2 + 8x^2 + 8x^4) =$$

$$= e^{x^2}(8x^4 + 20x^2 + 4)$$

Como $f \in C^{(3)}(\mathbb{R})$, podemos escrever a fórmula de Taylor pretendida.

$$f(x) = f(1) + (x-1) f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + \frac{(x-1)^3}{6} f'''(c),$$

com c entre 1 e x

$$f(1) = \int_e^e \sqrt{\log t}\, dt = 0$$

$$f'(1) = 2e$$

$$f''(1) = e(4+4) = 8e$$

Assim,

$$f(x) = 2e(x-1) + 4e(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{6} e^{c^2}(8c^4 + 20c^2 + 4),$$

com c entre 1 e x

<u>Pergunta 6</u>

a) $$\int_1^e (x^2+3)\log^2 x\, dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\log^2 x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{2}{3}x^2 + 6\right)\log x\, dx$$

$f = x^2+3 \quad F = \frac{x^3}{3} + 3x$

$g = \log^2 x \quad g' = 2\log x \frac{1}{x}$

$$= \frac{e^3}{3} + 3e - \left[\left(\frac{2}{9}x^3 + 6x\right)\log x\right]_1^e + \int_1^e \frac{2}{9}x^2 + 6\, dx$$

$f = \frac{2}{3}x^2 + 6 \quad F = \frac{2}{9}x^3 + 6x$

$g = \log x \quad g' = \frac{1}{x}$

$$= \frac{e^3}{3} + 3e - \frac{2}{9}e^3 - 6e + \left[\frac{2}{27}x^3 + 6x\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{9}e^3 - 3e + \frac{2}{27}e^3 + 6e - \frac{2}{27} - 6 =$$

$$= \frac{5}{27}e^3 + 3e - \frac{2}{27} - 6$$

b)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+13}\,dx = \int \frac{\cancel{t}}{t^2+6t+13}\,\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \int \frac{1}{t^2+6t+13}\,dt =$$

$e^x = t \Leftrightarrow x = \log t$

$$= \int \frac{1}{t^2+6t+9+4}\,dt =$$

$t^2+6t+13=0$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2}$

$$= \int \frac{1}{(t+3)^2+4}\,dt =$$

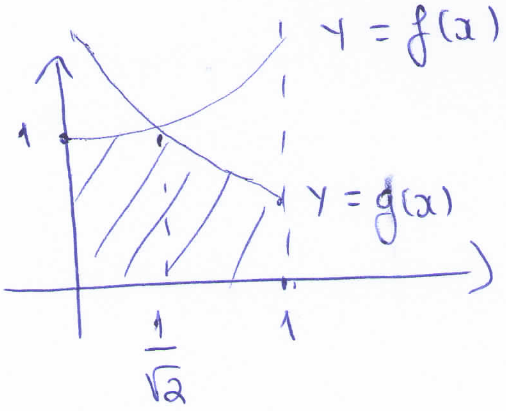
não existem raízes reais

$$= \int \frac{1/4}{\left(\frac{t+3}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1/2}{\left(\frac{t+3}{2}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t+3}{2}\right)+c =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x+3}{2}\right)+c \quad , \text{ com } c \in \mathbb{R}$$

<u>Pergunta 7</u>

Comecemos por esboçar um gráfico, não rigoroso, correspondente à área pedida.



$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\,x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2x^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 = 2x^4 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\underset{x^2=y}{\Leftrightarrow} 2y^2 + y - 1 = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm 3}{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{y = -1} \vee y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Área} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}\,x^2}\,dx =$$

$$\underset{x = \operatorname{sen} t}{=} \int_0^{\arcsin(1/\sqrt{2})} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t\,dt + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}\, x^{-2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t\,dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-x^{-1}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} =$$

$$= \int_0^{\pi/4} 1\,dt + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1+\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

Pergunta 8

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}$ dx trata-se de um integral impróprio misto

pois o domínio de integração é um conjunto ilimitado

e a função integranda é ilimitada no domínio de

integração.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^2 \underbrace{\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{em }]1,2]}}\,dx + \int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{em } [2,+\infty[}}\,dx$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{x^2\cancel{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$$ finito e

não nulo, logo $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ e $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ têm a mesma

natureza pelo que $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ é convergente.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{x^2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\sqrt{x}}{\cancel{x^2}\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1-1/x}} = 1$$

finito e não nulo, logo $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$

têm a mesma natureza pelo que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\,dx$ é convergente.

Como a função integranda é não negativa, a convergência será absoluta.