FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

# Análise Matemática I (B, C, D e E)

## Exame de Recurso — 17 de Julho de 2012

1. Considere o conjunto definido por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{x^2 - x - 2} < 0 \right\}.$$

(a) **[1.0 val.]** Determine o interior e o derivado de $A$.

(b) **[0.5 val.]** Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de $A$.

2. Calcule o valor dos seguintes limites:

(a) **[1.5 val.]** $\lim\limits_{n \to +\infty} \log(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3+1})$;

(b) **[1.0 val.]** $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}$.

3. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) **[0.5 val.]** Determine o domínio de $f$ e estude a sua continuidade.

(b) **[1.0 val.]** Estude a diferenciabilidade de $f$.

(c) **[1.0 val.]** Determine os extremos locais e estude a monotonia de $f$.

(d) **[1.0 val.]** Determine os pontos de inflexão e estude o sentido das concavidades de $f$.

(e) **[0.5 val.]** Determine o contradomínio de $f$.

4. **[2.0 val.]** Calcule, justificando, o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \left( e^{2 \operatorname{arcsen}(x)} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

V. S. F. F.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

5. Seja $f$ a função real de variável real definida por $f(x) = \displaystyle\int_e^{e^{x^2}} \sqrt{\log(t)}\, dt$.

   (a) **[1.5 val.]** Determine, justificando, o domínio de $f$.

   (b) **[1.5 val.]** Considere $x > 0$. Escreva a fórmula de Taylor de $f$, com resto de Lagrange de ordem $3$, em torno do ponto $a = 1$.

6. (a) **[1.5 val.]** Calcule o valor do seguinte integral:

$$\int_1^e (x^2+3)\log^2(x)\, dx.$$

   (b) **[1.5 val.]** Calcule a família de primitivas da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+13}.$$

7. **[2.0 val.]** Calcule o valor da área do domínio plano **limitado** pelo eixo dos xx, pelas rectas $x = 0$, $x = 1$ e pelas funções $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2}}$.

8. **[2.0 val.]** Estude a natureza do seguinte integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x-1}}\, dx.$$

| Expressão | Substituição |
|---|---|
| $f(x) = R(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}})$ | $x = t^\mu, \quad \mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$ |
| $f(x) = R\left(x, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots, \left(\frac{a\,x+b}{c\,x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$ | $\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^\mu$ <br> $\mu = \text{m.m.c.}\{n, q, \ldots, s\}$ |
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x = a\,\text{sen}(t)$ ou $x = a\,\cos(t)$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x = a\sec(t)$ ou $x = a\,\text{cosec}(t)$ |
| $f(x) = R(\text{sen}(x), \cos(x))$ | $\text{tg}(\frac{x}{2}) = t$ |
| $f(x) = R(e^x)$ | $e^x = t$ |