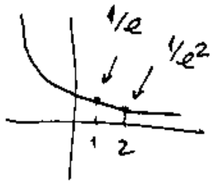
TÓPICOS DE RESOLUÇÃO DO EXAME
DE ÉPOCA NORMAL - 27 JANEIRO 2010.

1.

$$A = [-\sqrt{3}, -1] \cap \mathbb{Q}$$

$$B = \{ e^{-n} : n \in \mathbb{N} \} = \{ \frac{1}{e^n} : n \in \mathbb{N} \}.$$



$$C = \{ x \in \mathbb{N} : \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) < \pi/2 \}$$

a) $\text{int}(A \cup B) = \emptyset$

$(A \cup B)' = [-\sqrt{3}, -1] \cup \{0\}$. $\quad 0 = \lim \frac{1}{e^n}$

b) B não é fechado pq $0 \notin B$ e $0 \in \text{fr}(B)$

c) Comecemos por determinar C.

$-1 \leq \frac{x}{2} - 1 \leq 1$ (porque o domínio do arccos x é $[-1,1]$)

$(\Rightarrow) \quad 0 \leq \frac{x}{2} \leq 2$

$(\Rightarrow) \quad 0 \leq x \leq 4$

Resolvendo a desigualdade

$\arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) < \pi/2$

temos

$\cos\left(\arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right) > \cos \pi/2$ $\qquad$ cos x é decrescente em $[0, \pi]$

$(\Rightarrow) \quad \frac{x}{2} - 1 > 0$

$(\Rightarrow) \quad \frac{x}{2} > 1$

$(\Rightarrow) \quad x > 2$

PORTANTO, $C =]2, +\infty[\cap [0,4] \cap \mathbb{N} = \{3, 4\}$

$$\text{maj}(A \cup B \cup C) = [4, +\infty[.$$

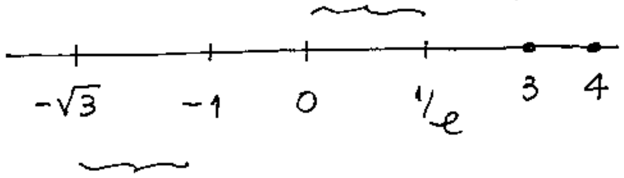
$$\text{Min}(A \cup B \cup C) =]-\infty, -\sqrt{3}]$$

sup = 4 $\qquad$ max = 4

inf = $-\sqrt{3}$ $\qquad$ min ñ tem.

(TER EM CONTA QUE

$B \subset [0, 1/e]$



$A \subset [-\sqrt{3}, -1]$

$A = [-\sqrt{3}, -1] \cap \mathbb{Q}$

E QUE $-\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$).

2. a) $$\lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{e^{n-1} - \pi^n} = \lim \frac{\frac{2^n}{\pi^{n+1}} + \frac{3^{n+1}}{\pi^{n+1}}}{\frac{e^{n-1}}{\pi^{n+1}} - \frac{\pi^n}{\pi^{n+1}}}$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \cdot \frac{1}{\pi} + \left(\frac{3}{\pi}\right)^{n+1}}{\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}} = \frac{0+0}{0-\frac{1}{\pi}} = 0$$

b) $$\lim \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^2+3} \log\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}$$

$$= \lim \operatorname{sen}(n) \cdot \frac{n^2}{n^2+3} \cdot \log\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)$$

$$= 0$$

porque $\operatorname{sen}(n)$ é uma sucessão limitada e

$\log\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)$ é um infinitésimo e $\frac{n^2}{n^2+3} \to 1$.

3. $x_n = \frac{2^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) T: $\frac{2^n}{n!} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \quad \forall n \geq 3$

$n = 3$ $\qquad \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{3 \times 2} = \frac{4}{3} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

HI: $\frac{2^n}{n!} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

TI: $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{2}{n+1} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{n+1}$$

$$\leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{3}$$

$n+1 > 3 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{3}$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

b) $$\lim x_n = \lim \frac{2^n}{n!}$$

$$0 \leq \lim x_n \leq \lim 2 . \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim x_n = 0$$

c) x_n é conv $\Rightarrow$ x_n é limitada.

4. $$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x \geq 0 \\ \operatorname{sen} x & x < 0 \end{cases}$$

a) $D = \mathbb{R}$

Contínua em $x > 0$ por ser polinomial

Contínua em $x < 0$ por ser $\operatorname{sen} x$

Em $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) = 0 = f(0) \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ é contínua em $x = 0$

b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x & x > 0 \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \to 0^+} (3x^2 + 3x) = 0 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \to 0^-} \cos x = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \nexists \; f'(0)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 3x = 0 \wedge x > 0) \vee$$

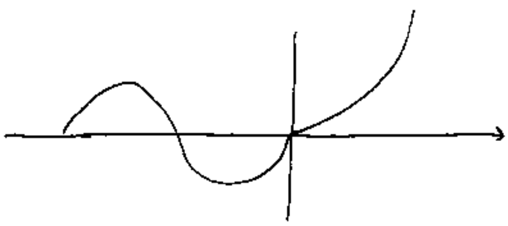
$$(\cos x = 0 \wedge x < 0)$$

$$\Leftrightarrow (3x(x+1) = 0 \wedge x > 0) \vee$$

$$\left(x = (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}^-\right)$$

$$\Leftrightarrow x = (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}^-$$

Extremos de f são os pontos $f\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}^-$; o máximo de f é 1 e o mínimo é -1.



Em $x=0$ não temos extremo.

c) $$f''(x) = \begin{cases} \overset{>0}{6x+3} & x > 0 \\ -\operatorname{sen} x & x < 0 \end{cases}$$

pontos de inflexão: são os da função seno.

d) Basta calcular os zeros da função em $[0,1]$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}$$

5. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3x}\right)^{x^2}$ $\quad \infty^0$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} x^2 \cdot \log\left(\frac{1}{3x}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} -x^2 \cdot \log(3x)} \qquad 0 \times \infty$$

Sejam $f(x) = \log(3x)$ e $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(3x)}{-\frac{1}{x^2}} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

são diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$ e $g'(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$, e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{2x} = 0$$

portanto, pela Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(3x)}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3x}\right)^{x^2} = e^0 = 1.$$

6.

a) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}, \; x>0$

$f(x)=\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ $\qquad f(0)=1$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-1/2}$ $\qquad f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1}$

$= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ $\qquad f''(c) = -\frac{1}{4}(1+c)^{-3/2}$

Existe $c \in]0,x[$:

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}}\cdot\frac{x^2}{2!}$$

$$= 1+\frac{x}{2} - \underbrace{\frac{x^2}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}}}_{\geq 0 \ \forall x>0} \leq 1+\frac{x}{2}$$

Mas $\frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} < 1$ porque $c>0$,

portanto,

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}}.$$

$x = 1$

b)

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \leq \sqrt{2} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\underset{(4)}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

$$1,3 < \sqrt{2} < 1,5 \qquad \underset{(4)}{\frac{3}{2}} - \frac{11}{8} = \frac{1}{8} = 0,125$$

c)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{1} + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x}{2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{x}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+c)^3}} = 0$$

7. a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{5+3\cos x}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{5+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5+5t^2+3-3t^2}\,dt$$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = \pi/2 \Rightarrow t = 1$

$$= \int_0^1 \frac{2}{8+2t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{4+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1/4}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

b) $\quad P\, x \log(x^2+1) \qquad (0,1)$

$$= \frac{x^3}{2} \cdot \log(x^2+1) - P \frac{x^3}{x^2+1}$$

$$x \longrightarrow \frac{x^2}{2}$$

$$\log(x^2+1) \longrightarrow \frac{2x}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x^2+1) - P\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} & x^2+1 \\ \cline{2-2} \cancel{-x^3} - x & x \\ \hline -x & \end{array}$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$$

A primitiva pedida tem que satisfazer

$$0 + C = 1$$

$$C = \underline{1}$$

portanto, a primitiva é:

$$\frac{x^2}{2} \log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + 1.$$

8. O integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{(3x+1)\cos x}{x^3 - x}\,dx$$

é um integral impróprio de 1ª espécie porque o domínio da função integrando é $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ e é contínua em $[2,+\infty[$.

Como a função integrando muda infinitas vezes de sinal e

$$0 \leq \left| \frac{(3x+1)\cos x}{x^3-x} \right| \overset{(*)}{\leq} \frac{3x+1}{x^3-x} \qquad \forall x \geq 2$$

vamos estudar o integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}\,dx$$

comparando-o com o integral convergente

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+1}{x^3-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+x^2}{x^3-x} = 3.$$

Sendo este limite um nº real positivo podemos dizer que os dois integrais têm a mesma natureza, portanto, o integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}\,dx$$

é convergente.

Pela desigualdade (*) concluímos que o integral

$$\int_2^{+\infty} \left| \frac{(3x+1)\cos x}{x^3 - x} \right| dx$$

é convergente, o que implica que o integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{(3x+1)\cos x}{x^3 - x}\, dx$$

é absolutamente convergente.

9. Seja $g(x) = \log(f(x))$. Esta função está bem definida em $[a,b]$ porque $f(x)$ é positiva em $[a,b]$. g é contínua em $[a,b]$ porque é a composição de funções contínuas e é diferenciável em $]a,b[$ por ser a composição de funções diferenciáveis em $]a,b[$. Estamos nas condições do Teorema de Lagrange:

$$\exists\, c \in \,]a,b[\,: \quad g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

Mas $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, portanto,

$$\exists\, c \in \,]a,b[\,: \quad \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\log(f(b)) - \log(f(a))}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, c \in \,]a,b[\,: \quad \frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\log\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, c \in \,]a,b[\,: \quad e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)} = e^{\log\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, c \in \,]a,b[\,: \quad e^{\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)} = \frac{f(b)}{f(a)}.$$