Análise Matemática - I (C)
Resolução do Exame de Época Normal- 27 Janeiro 2010

1. (a) $int(A \cup B) = \emptyset$
   $(A \cup B)' = [-\sqrt{3}, -1] \cup \{0\}$

   (b) $\overline{B} = B \cup fr(B) = B \cup \{0\} \neq B$, logo B não é um conjunto fechado.

   (c) Para escrever o conjunto C na forma de intervalo ou união de intervalos há que resolver a desigualdade $\arccos(\frac{x}{2} - 1) < \frac{\pi}{2}$.
   $\arccos(\frac{x}{2} - 1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{2} - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 2 < x \leq 4$.
   Como $x \in \mathbb{N}$, $C = \{3, 4\}$.
   $A \cup B \cup C = ([-\sqrt{3}, -1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 4\}$.
   O conjunto dos majorantes de $A \cup B \cup C$ é $[4, +\infty[$. O conjunto dos minorantes de $A \cup B \cup C$ é $]-\infty, -\sqrt{3}]$. O $max(A \cup B \cup C) = 4$ porque é um majorante que pertence ao conjunto. $sup(A \cup B \cup C) = 4$ porque é o elemento mínimo do conjunto dos majorantes. Não existe mínimo porque nenhum minorante pertence ao conjunto. $inf(A \cup B \cup C) = -\sqrt{3}$ porque é o elemento máximo do conjunto dos minorantes.

2. (a) $\lim b_n = \lim \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{e^{n-1} - \pi^n} = \lim \dfrac{\frac{2^n}{\pi^n} + \frac{3^{n+1}}{\pi^n}}{\frac{e^{n-1}}{\pi^n} - \frac{\pi^n}{\pi^n}} = \lim \dfrac{(\frac{2}{\pi})^n + 3(\frac{3}{\pi})^n}{\frac{1}{e}(\frac{e}{\pi})^n - 1} = \dfrac{0 + 3 \times 0}{\frac{1}{e} \times 0 - 1} = 0$

   (b) $\lim c_n = \lim \dfrac{sen(n)}{n^2+3} \log\left[\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}\right] = \lim sen(n) \dfrac{n^2}{n^2+3} \log\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right) =$
   $\lim sen(n) \dfrac{1}{1+\frac{3}{n^2}} \log\left(\dfrac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right)$
   A sucessão $sen(n)$ é uma sucessão limitada. Como $\lim \dfrac{1}{1+\frac{3}{n^2}} \log\left(\dfrac{3+\frac{1}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right) =$
   $\dfrac{1}{1+0} \log\left(\dfrac{3+0}{3+0}\right) = 0$ a sucessão correspondente é um infinitésimo. O produto de uma sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo, assim $\lim c_n = 0$.

3. (a) Pretende-se provar pelo princípio da indução matemática que
   $\dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.
   (i) : A proposição é verdadeira para $n = 3$.
   Para $n = 3$ vem: $\dfrac{2^3}{3!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3-2}$. Como $\dfrac{2^3}{3!} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)$ que é uma proposição verdadeira.

(ii) : Hereditariedade
De seguida, é necessário demonstrar que $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$, com k um natural qualquer maior ou igual a 3.

A hipótese de indução é:
$H : \dfrac{2^k}{k!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}$

Pretende-se provar que:
$T : \dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$

Dem :
$\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \dfrac{2^k}{k!}\dfrac{2}{(k+1)}$ por hipótese de indução $\dfrac{2^k}{k!}\dfrac{2}{(k+1)} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}\dfrac{2}{k+1}$.
Como $n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ tem-se $k+1 \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{3}$.
Assim, $2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2}\dfrac{2}{k+1} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$
Por (i) e (ii) prova-se, pelo princípio da indução matemática, que
$\dfrac{2^n}{n!} \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$.

(b) Seja $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ definida por $v_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$, $\lim v_n = \lim 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$. Pela alínea (a) $x_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ logo $\lim x_n \leq \lim v_n = 0$. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ é uma sucessão de termos positivos, $\lim x_n \geq 0$ logo $\lim x_n = 0$.

(c) A sucessão é convergente como se provou pela alínea anterior, logo a sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

4. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \vee x < 0\} = \mathbb{R}$.

Estudo da continuidade:
<u>Para $x > 0$</u>: A função está definida por uma função polinomial, contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua neste subconjunto.
<u>Para $x < 0$</u>: A função está definida por uma função trigonométrica, contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua neste subconjunto.
<u>Para $x = 0$</u>:
Estude-se a continuidade da função no ponto $x = 0$ começando por calcular os seus limites relativos.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sen}(x)=0$$

A função no ponto $x=0$ toma o valor 0 ($f(0)=0$). Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ então $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ pelo que a função é contínua no ponto $x=0$.

Consequentemente, a função é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Estudo da diferenciabilidade:

<u>Para $x>0$</u>: A função está definida por uma função polinomial, diferenciável em $\mathbb{R}$, logo é diferenciável neste subconjunto.

<u>Para $x<0$</u>: A função está definida por uma função trigonométrica, diferenciável em $\mathbb{R}$, logo é diferenciável neste subconjunto.

<u>Para $x=0$</u>:

Estude-se a existência de derivada no ponto 0.

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+\frac{3}{2}x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2+\frac{3}{2}x)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)=0$$

$$f'_e(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x)-0}{x-0}=1$$

Como $f'_d(0)=f'_e(0)$ não existe $f'(0)$. $\therefore$ f é diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Para determinar os extremos relativos, começe-se por determinar os pontos de estacionaridade da função.

<u>Para $x>0$</u>:

$$f'(x)=\left(x^3+\frac{3}{2}x^2\right)'=3x^2+\frac{3}{2}.2x=3x^2+3x=3x(x+1)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x(x+1)=0\Leftrightarrow \underbrace{x=0\vee x=-1}_{\notin]0,+\infty[}$$

<u>Para $x<0$</u>:

$f'(x)=\cos(x)$

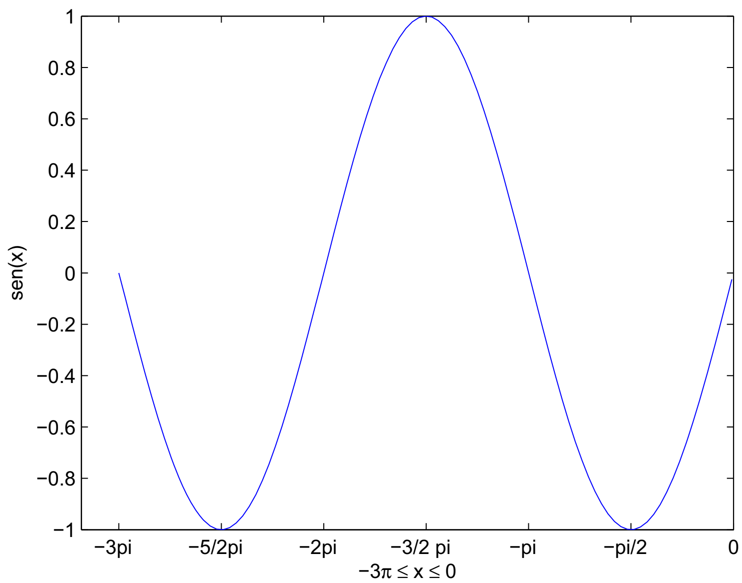
$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Os pontos de estacionaridade que estão no intervalo $]-\infty,0[$, são todos os pontos da forma $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}^-$. Dada a periodicidade da função $\cos(x)$, bastará analisar um subintervalo de $\mathbb{R}^-$ de amplitude 2π, para se indicar todos os extremos relativos da função.

	$-\infty$	-2π		$-\frac{3}{2}\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0	$+\infty$
$\cos(x)$	$\ldots$	$+$	$+$	0	$-$	\\\	$+$	\\\	\\\
$3x(x+1)$	\\\	\\\	\\\	\\\	\\\	\\\	\\\	\\\	$+$
$f'(x)$	$\ldots$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	\\\	$+$
$f(x)$	$\ldots$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$

Da análise do quadro e atendendo à continuidade da função pode-se afirmar que:
- os pontos da forma $x = \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de mínimos relativos da função, tendo a função o seu mínimo relativo nestes pontos igual a -1;
- os pontos $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de máximos relativos, correspondentes ao máximo relativo da função igual a 1.

Alternativamente, para o estudo dos extremos da função f em $\mathbb{R}^-$ poder-se-ia ter desenhado o gráfico da função $\operatorname{sen}(x)$, num subintervalo de $\mathbb{R}^-$, como se mostra na figura abaixo, e referir que devido à periodicidade desta função, todos os pontos $x = \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de mínimo da função e todos os pontos $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de máximo de f.



(c) Estude-se o sinal da segunda derivada para analisar a concavidade de f.

<u>Para $x > 0$</u>:

$f''(x) = 6x + 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \notin]0, +\infty[$, logo $f''(x)$ não tem zeros no intervalo $]0, +\infty[$.

<u>Para $x < 0$</u>:

$f''(x) = -\text{sen}(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\text{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$.

<u>Para $x = 0$</u>:

Como não existe $f'(0)$ também não existe $f''(0)$.

Analogamente ao que foi efectuado para o estudo dos extremos, apresenta-se apenas o comportamento de $f''(x)$ num subintervalo de $\mathbb{R}^-$ de amplitude 2π.

	$-\infty$	-2π		$-\pi$		0	$+\infty$
$-\text{sen}(x)$	...	0	$-$	0	$+$	\\\	\\\
$6x+3$	\\\	\\\	\\\	\\\	\\\	\\\	$+$
$f''(x)$	...	0	$-$	0	$+$	\\\	$+$
$f(x)$	...	0	$\cap$	1	$\cup$	0	$\cup$

$f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em todos os subintervalos de $\mathbb{R}^-$ da forma $](2k-1)\pi, 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}_0^-$ e em $]0, +\infty[$.
$f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em todos os subintervalos $](2k-2)\pi, (2k-1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}^-$.
Todos os pontos $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}^-$ são pontos de inflexão de f.

Alternativamente, para o estudo dos sentidos de concavidade da função f em $\mathbb{R}^-$ poder-se-ia recorrer ao esboço gráfico da alínea anterior e retirar as conclusões anteriores, quanto ao sentido de concavidade e pontos de inflexão de f.

(d) No intervalo $[0, 1]$ a função está definida por $x^3 + \dfrac{3}{2}x^2$. Foi visto nas alíneas anteriores que a função é contínua e estritamente crescente neste intervalo,logo no máximo admite um zero, o que equivale a afirmar que a equação $f(x) = 0$ tem no máximo uma raíz.

5. (a) No cálculo do limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{3x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x)^{-x^2}$ surge uma indeterminação do tipo 0^0 que podemos converter numa do tipo $0 \times \infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} (3x)^{-x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\log\left[(3x)^{-x^2}\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} -x^2 \log(3x)}$. Calcule-se o $\lim\limits_{x\to 0^+} -x^2 \log(3x)$, que é

uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$, que pode ser convertida numa indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ considerando $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(3x)}{-\frac{1}{x^2}}$. Por forma a utilizar a regra de Cauchy. Considere-se $f(x) = \log(3x)$ e $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, e verifique-se as condições necessárias à sua aplicação num intervalo $I =]0, a[, \forall a > 0$.

- indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$
- f e g são diferenciáveis em I
- $g'(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0, \forall x \in I$

Calcule-se $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Se este limite existir então $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existirá e tomará o mesmo valor.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2} = 0.$$

Pela Regra de Cauchy, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe e toma o mesmo valor, pelo que, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$$\therefore \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{3x}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} -x^2 \log(3x)} = e^0 = 1$$

6. (a) Sendo $f(x) = \sqrt{1+x}$, de domínio $[-1, +\infty[$, uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $[-1, +\infty[$, pode fazer-se o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto 0 de $f(x)$ até à ordem $n \in \mathbb{N}$.

A Fórmula de Taylor em torno do ponto 0, com resto de Lagrange de ordem 2 é dada por:

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(c)$ com c entre 0 e x.

$f(x) = \sqrt{1+x}$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$

$f'(0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$

$f''(c) = -\frac{1}{4}(1+c)^{-3/2}$

Assim, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2}{2!}(1+c)^{-3/2} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}(1+c)^{-3/2}, \forall x > 0$.

Como $x > 0$,

$$0 < c < x \Leftrightarrow$$

$$1 < 1 + c < 1 + x \Leftrightarrow$$

$$1 < (1+c)^{3/2} < (1+x)^{3/2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} < \frac{1}{(1+c)^{3/2}} < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < -\frac{1}{(1+c)^{3/2}} < -\frac{1}{(1+x)^{3/2}} < 0$$

Considerando,

$$-1 < -\frac{1}{(1+c)^{3/2}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{x^2}{8} < -\frac{x^2}{8}\frac{1}{(1+c)^{3/2}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} < 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\frac{1}{(1+c)^{3/2}} < 1+\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\frac{1}{(1+c)^{3/2}} \leq 1+\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}, \forall x > 0$$

(b) $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$, pela alínea (a)

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8} \leq \sqrt{1+1} \leq 1+\frac{1}{2}$$

$$1,5-\frac{1}{8} \leq \sqrt{2} \leq 1,5$$

Quando se afirma que $\sqrt{2} \simeq 1,5$ comete-se um erro inferior ou igual a $\frac{1}{8}$.

(c) Pela alínea (a)

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{x}{8} \leq \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x} \leq 0$$

$\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{8} = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ logo pelo Teorema das funções enquadradas
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x} = 0$
Uma resolução alternativa seria:
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}(1+c)^{-3/2}-1-\frac{x}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^2}{8}(1+c)^{-3/2}}{x} =$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{8x(1+c)^{3/2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{8(1+c)^{3/2}}$ com $0 < c < x$. Se $x \to 0^+ \Rightarrow c \to 0^+$,
assim $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{8(1+c)^{3/2}} = \frac{0}{8} = 0.$

7. (a) Mostre-se que quando $\tan(\frac{x}{2}) = t$ se tem $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$\cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \text{sen}^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} - \frac{\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$\tan(\frac{x}{2}) = t \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \arctan(t) \Leftrightarrow x = 2\arctan(t)$ donde $\dfrac{dx}{dt} = 2\dfrac{1}{1+t^2}$. Quando $x = 0 \Rightarrow t = \tan(0) = 0$ e quando $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

Assim, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos(x)}dx = \int_0^1 \frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}} \times 2\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}dt =$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{8+2t^2}dt = \int_0^1 \frac{1/4}{1+\frac{t^2}{4}}dt = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1/2}{1+(\frac{t}{2})^2}dt = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^1 =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

(b) Primitive-se $g(x)$ por partes. Para tal derive-se a função $\log(x^2+1)$ e primitive-se a função x.

$\left[\log(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ e $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$.

$\displaystyle\int x\log(x^2+1)dx = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx =^{(*)}$
$\frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \int \left(x + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$, com $C \in \mathbb{R}$

$\displaystyle{}^{(*)}\frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} = x - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}.$

Quando $x = 0$, $\displaystyle\int x\log(x^2+1)dx$ toma o valor 1. Assim $\dfrac{0^2}{2}\log(0^2+1) - \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{1}{2}\log(0^2+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$. A primitiva pretendida é $\dfrac{x^2}{2}\log(x^2+1) - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + 1$.

8. A função integranda $f(x) = \dfrac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}$ tem domínio $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$. A função está definida no intervalo $[2,+\infty[$ pelo que estamos perante um integral impróprio de 1ª espécie.

Como $3x+1 \geq 0, \forall x \geq 2$, $x^3 - x \geq 0, \forall x \geq 2$ e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ vem

$$\left|\frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}\right| \leq \frac{3x+1}{x^3-x}, \forall x \geq 2. \tag{1}$$

Estude-se a convergência do integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}dx$, que é um integral impróprio de 1ª espécie com função integranda não negativa.

Considere-se o integral convergente $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$, de função integranda não negativa.

Determine-se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{3x+1}{x^3-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+x^2}{x^3-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 3$, finito e não nulo. Então os integrais são da mesma natureza, isto é, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x+1}{x^3-x}dx$ é um integral convergente. Atendendo à desigualdade (1) o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left|\frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}\right| dx$ é convergente pelo que o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(3x+1)\cos(x)}{x^3-x}dx$ é absolutamente convergente.

9. Considere-se a função $g(x) = \log(f(x))$ que está bem definida pois $f(x)$ é positiva em $[a, b]$. A função $g(x)$ é contínua em $[a, b]$, por ser a composta de duas funções contínuas em $[a, b]$ e é diferenciável em $]a, b[$, novamente por ser a composta de duas funções diferenciaveis em $]a, b[$ sendo a sua derivada $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Pelo Teorema de Lagrange existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$. Assim $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} \Leftrightarrow$ $\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \dfrac{\log(f(b)) - \log(f(a))}{b - a} \Leftrightarrow (b - a)\dfrac{f'(c)}{f(c)} = \log\left(\dfrac{f(b)}{f(a)}\right) \Leftrightarrow e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} = \dfrac{f(b)}{f(a)}$.