FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B e C)

Exame de Época Normal — 27 de Janeiro de 2010

1. (*2 val.*) Considere os conjuntos:

$$A = [-\sqrt{3}; -1] \cap \mathbb{Q}, \quad B = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\} \text{ e } C = \left\{x \in \mathbb{N} : \arccos\left(\frac{x}{2} - 1\right) < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

   (a) Calcule o interior e o derivado de $A \cup B$.

   (b) Será B um conjunto fechado? Justifique a sua resposta.

   (c) Explicite o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de $A \cup B \cup C$. Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cup B \cup C$. Justifique.

2. (*2 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

   (a) $b_n = \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{e^{n-1} - \pi^n}$;

   (b) $c_n = \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^2 + 3} \log\left[\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{n^2}\right]$.

3. (*2 val.*) Considere a sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \frac{2^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   (a) Utilizando o Princípio de Indução Matemática, mostre que:

$$\frac{2^n}{n!} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

   (b) Recorrendo à alínea anterior, calcule o $\lim x_n$.

   (c) A sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada? Justifique.

4. (*4 val.*) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{3}{2}x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ \operatorname{sen}(x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade de f.

   (b) Estude a diferenciabilidade e os extremos relativos de f.

   (c) Determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.

   (d) Mostre que a equação $f(x) = 0$ não pode ter duas raízes distintas no intervalo $[0, 1]$.

V. S. F. F.

5. (*1,5 val.*) Calcule, justificando, o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{3x}\right)^{x^2}.$$

6. (*2,5 val.*)

   (a) Mostre que $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$, para $x > 0$.
   Sugestão: Escreva a fórmula de Taylor, em torno do ponto 0, para a função $\sqrt{1+x}$.

   (b) Utilizando a alínea (a), indique uma estimativa do erro que se comete ao afirmar que $\sqrt{2} \simeq 1.5$.

   (c) Recorrendo novamente à alínea (a), calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x}$.

7. (*2,5 val.*)

   (a) Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5 + 3\cos x} dx$.
   Sugestão: Use a mudança de variável $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ (mostre que $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$).

   (b) Calcule a primitiva da função $g(x) = x\,\log(x^2+1)$, que toma o valor 1 em $x = 0$.

8. (*1,5 val.*) Usando os critérios de convergência, estude a natureza (ou convergência) do integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{(3x+1)\,\cos(x)}{x^3 - x}\, dx.$$

9. (*2 val.*) Seja f uma função contínua e positiva no intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, diferenciável em $]a,b[$. Mostre que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$