Análise Matemática I C

Resolução do Exame de Época de Recurso - 10 de Fevereiro de 2010

1. $A = [0,1] \cup \left\{ \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Considere-se $u_n = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$.

   $u_1 = 1 + 1 = 2$, u_n é uma sucessão decrescente (porque $\dfrac{1}{n}$ é uma sucessão decrescente) e $\lim u_n = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

   $int(A) =]0,1[$

   $fr(A) = \{0,1\} \cup \left\{ \dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

   $A' = [0,1]$

   $int(A) =]0,1[\neq A$, logo A não é aberto.

   $\bar{A} = [0,1] \cup \{\frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = A$, logo A é fechado.

2. (a) Pretende-se provar pelo princípio da indução matemática que

   $p(n) : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (i) : A proposição é verdadeira para $n = 1$.

   Para $n = 1$ temos que provar que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2} = \frac{1^2+1}{4}$.

   Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2} = \frac{1}{2}$ e $\dfrac{1^2+1}{4} = \dfrac{1}{2}$, a proposição é verdadeira.

   (ii) : Hereditariedade ($p(n) \Rightarrow p(n+1)$ com n um número natural qualquer)

   A hipótese de indução é:

   $H : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}$

   Pretende-se provar que:

   $T : \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{4}$

   Dem :

   $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} + \frac{n+1}{2}$

   Por hipótese de indução $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}$ pelo que a expressão anterior é igual a

   $\dfrac{n^2+n}{4} + \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n^2+n+2n+2}{4} = \dfrac{n^2+2n+1+n+1}{4} = \dfrac{(n+1)^2+n+1}{4}$.

   Assim, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{4}$.

Por (i) e (ii) prova-se, pelo princípio da indução matemática, que $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim u_n = \lim \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}} = \sqrt[n]{\frac{n^2+n}{4}}$. Seja $v_n = \frac{n^2+n}{4}$, $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Se existir $\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, então $\lim \sqrt[n]{v_n} = b$.

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)}{4}}{\frac{n^2+n}{4}} = \lim \frac{(n+1)^2+(n+1)}{n^2+n} = \lim \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

pelo que $\lim \sqrt[n]{v_n} = 1$ ou seja $\lim u_n = 1$.

3. (a) $\lim a_n = \lim \frac{\sqrt[3]{n^2+3}+\operatorname{sen}(n)}{2+n\sqrt[3]{n+3}} = \lim \left(\frac{\sqrt[3]{n^2+3}}{2+n\sqrt[3]{n+3}} + \frac{1}{2+n\sqrt[3]{n+3}} \operatorname{sen}(n) \right)$

No cálculo do $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2+3}}{2+n\sqrt[3]{n+3}}$ surge uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação vamos dividir tanto o numerador como o denominador pela potência de maior grau. Assim este limite vem igual a

$$\lim \frac{\frac{\sqrt[3]{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^4}}}{\frac{2+n\sqrt[3]{n+3}}{\sqrt[3]{n^4}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}}}{\frac{2}{\sqrt[3]{n^4}}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

A sucessão $\operatorname{sen}(n)$ é uma sucessão limitada e $\lim \frac{1}{2+n\sqrt[3]{n+3}} = 0$.
Como o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo, $\lim \frac{1}{2+n\sqrt[3]{n+3}} \operatorname{sen}(n) = 0$.

Assim,
$$\lim a_n = \lim \frac{\sqrt[3]{n^2+3}}{2+n\sqrt[3]{n+3}} + \lim \frac{1}{2+n\sqrt[3]{n+3}} \operatorname{sen}(n) = 0+0 = 0.$$

(b) $\lim b_n = \lim \left(\frac{2^n-1}{2^n+4} \right)^n$

No cálculo deste limite surge uma indeterminação do tipo (1^∞). Para levantar esta indeterminação vamos usar o conhecido limite de Neper. Assim,

$$\lim \left(\frac{2^n-1}{2^n+4} \right)^n = \lim \left[\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1+\frac{4}{2^n}} \right)^{2^n} \right]^{\frac{n}{2^n}} = \left(\frac{e^{-1}}{e^4} \right)^{\lim \frac{n}{2^n}} = \left(e^{-5}\right)^0 = e^0 = 1.$$

4. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : (|x| > 0 \ \wedge \ x \neq 0) \vee x = 0\}$ e dado que $|x| > 0$ é equivalente a $x \neq 0$, podemos afirmar que $D_f = \mathbb{R}$.

Para $x \neq 0$: A função está definida como o produto de uma função polinomial pela composta de uma função polinomial, com uma função logarítmica e a função módulo, todas funções contínuas nos respectivos domínios, sendo a função resultante contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Para $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\log^2(|x|)$. Trata-se de uma indeterminação $(0\times\infty)$ pelo que poderemos rescrever o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log^2(|x|)}{\frac{1}{x}}$ obtendo uma indeterminação $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Vamos aplicar a regra de Cauchy para o cálculo deste limite. Considere-se $g(x) = \log^2(|x|)$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Ambas as funções são diferenciáveis em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, logo fica provada a diferenciabilidade das funções numa $V_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$, com $\varepsilon = 1$, por exemplo.
$h'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0$, $\forall x \in V_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$. Calcule-se $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{h'(x)}$. Se este limite existir, então $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ existirá e tomará o mesmo valor.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\log|x|\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\log|x|}{-\frac{1}{x}}$ que é novamente uma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Dado que ambas as funções numerador e denominador são diferenciáveis em $V_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$ e dado que a derivada da função do denominador é diferente de zero para todos os pontos desse conjunto, podemos aplicar novamente a regra de Cauchy, calculando $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2\log|x|)'}{\left(-\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2x^2}{x} = 0$. Logo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Dado que $f(0) = 0$, podemos concluir que f é contínua em $x = 0$, ou seja f é contínua em todo o seu domínio.

(b) Estudo da diferenciabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x\log^2(x) & , \text{ se } x > 0 \\ x\log^2(-x) & , \text{ se } x < 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Para $x \neq 0$: A função está definida pelo produto de uma função polinomial pela composta de uma função polinomial, com uma função logarítmica e com a função módulo, todas funções diferenciáveis nos respectivos domínios, sendo a função resultante diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Para $x = 0$:

Vamos estudar a existência de derivada no ponto 0.
$f'_d(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\log^2(x) - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\log^2(x) = +\infty$. Como a derivada lateral direita não é finita, a função poderá admitir derivada no ponto, mas não será diferenciável em $x = 0$.

$\therefore f$ é diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Para determinarmos os extremos relativos, vamos determinar os pontos de estacionariedade da função.

<u>Para $x > 0$</u>:

$$f'(x) = (x\log^2(x))' = \log^2(x) + x2\log(x)\frac{1}{x} = \log^2(x) + 2\log(x) = \log(x)(\log(x)+2)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x) = 0 \ \vee \ \log(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^0 \ \vee \ \log(x) = -2 \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = \mathrm{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. Ambos os pontos estão no intervalo $]0, +\infty[$.

<u>Para $x < 0$</u>:

$$f'(x) = (x\log^2(-x))' = \log^2(-x) + x2\log(-x)\frac{1}{x} = \log(-x)(\log(-x)+2)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(-x) = 0 \vee \log(-x) = -2 \Leftrightarrow -x = \mathrm{e}^0 \ \vee \ -x = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$, que são ambos pontos do intervalo $]-\infty, 0[$.

	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$		0		$\frac{1}{\mathrm{e}^2}$		1	$+\infty$
$\log(-x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	\\	\\\	\\	\\\	\\	\\\
$\log(-x)+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	\\	\\\	\\	\\\	\\	\\\
$\log(x)$	\\\	\\	\\\	\\	\\\	\\	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\log(x)+2$	\\\	\\	\\\	\\	\\\	\\	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	\\	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Da análise do quadro e atendendo à continuidade da função podemos afirmar que:

$f(-1)$ e $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$ são máximos relativos da função;

$f\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$ e $f(1)$ são mínimos relativos de f;

dado que f é contínua em $x = 0$ e a função não apresenta mudança de monotonia na vizinhança do ponto, conclui-se que $f(0)$ não é extremo.

(c) Estudemos o sinal da segunda derivada para analisarmos os sentidos de concavidade de f.

<u>Para $x < 0$</u>:

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\log(-x)+2) + \log(-x)\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\log(-x)+1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{x} = 0}_{\text{C. impossível}} \ \vee \ \log(-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\mathrm{e}} \in]-\infty, 0[.$$

<u>Para $x > 0$</u>: Analogamente se obtém $f''(x) = \dfrac{2}{x}(\log(x)+1)$ e

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\frac{2}{x}$	$-$	$-$	$-$	\\	\\\	\\	\\\
$\log(-x)+1$	$+$	0	$-$	\\	\\\	\\	\\\
$\frac{2}{x}$	\\\	\\	\\\	\\	$+$	$+$	$+$
$\log(x)+1$	\\\	\\	\\\	\\	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	\\	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$-\frac{1}{e}$	$\cup$	0	$\cap$	$\frac{1}{e}$	$\cup$

$f(x)$ tem a concavidade voltada para cima em $]-\frac{1}{e},0[$ e em $]\frac{1}{e},+\infty[$

$f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\frac{1}{e}[$ e em $]0,\frac{1}{e}[$

Os pontos $\left(-\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$ e $\left(\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$ são pontos de inflexão de f.

Dado que existe mudança do sentido de concavidade de f numa vizinhança de $x=0$, teremos de avaliar a existência de derivada no ponto, para garantir que $(0,f(0))$ é ponto de inflexão de f. Para isso calculemos a derivada à esquerda do ponto. $f'_e(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\log^2(-x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\log^2(-x)=+\infty$, que é igual à derivada à direita calculada anteriormente, pelo que f é derivável em $x=0$ e portanto o ponto $(0,0)$ é também ponto de inflexão de f.

5. (a) $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, por ser a soma de uma função polinomial com a função trigonométrica $\operatorname{sen}(x)$, ambas contínuas em $\mathbb{R}$.
$f(0)=-1$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi}{2}$, pelo que $f(0)\,f(\frac{\pi}{2})<0$. Pelo corolário do teorema de Bolzano, podemos garantir que f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e portanto a raiz está necessariamente em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

   (b) $f(x)$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x)=1+\cos(x)$.
$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos(x)=-1\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Como $f'(x)$ não tem nenhum zero no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, e é sempre positiva, podemos garantir que neste intervalo a função f será estritamente crescente, tendo por isso no máximo uma raiz real. Assim sendo, a raiz que garantimos a existência na alínea (a), é única.

6. (a) Pretende-se determinar a expansão em fórmula de MacLaurin de ordem 5 para a função $\log(1+x^2)$. Sabemos que a expansão em fórmula de MacLaurin para $\log(1+x)$ é dada por $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon_1(x)$, com $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x)=0$.
Considerando $h(x)=x^2$ e dado que $h(0)=0$, podemos utilizar a propriedade do desenvolvimento polinomial da função composta para obter o desenvolvimento polinomial para a função $g(x)$, dado por
$\log(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+x^4\varepsilon_2(x)$, com $\lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x)=0$.

(b) No cálculo do $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)-x^2}{\cos(x)-1+\dfrac{x^2}{2}}$ surge uma indeterminação do tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Dado que na alínea anterior determinámos a expansão em fórmula de MacLaurin para a função $\log(1+x^2)$, podemos determinar também o desenvolvimento polinomial limitado de ordem 5, em torno do ponto zero, para a função $\cos(x)$, que nos permitirá resolver a indeterminação.

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_3(x)$ com $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$. Daqui resulta que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-x^2}{\cos(x)-1+\dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 - \dfrac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_2(x)\right) - x^2}{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_3(x)\right) - 1 + \dfrac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{x^4}{2} + x^4\varepsilon_2(x)}{\dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_3(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2} + \varepsilon_2(x)}{\dfrac{1}{24} + \varepsilon_3(x)} = -12$$

7. Vamos calcular o valor do integral $\displaystyle\int_0^\pi (x+2)^2 \mathrm{sen}(x)dx$ utilizando o método de integração por partes. Seja $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ e $g(x) = (x+2)^2$.

$$\int_0^\pi (x+2)^2 \mathrm{sen}(x)dx = \left[-(x+2)^2\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-2(x+2)\cos(x))dx =$$
$$-(\pi+2)^2(-1) - (-2^2 \times 1) + 2\int_0^\pi (x+2)\cos(x)dx$$

Utilizando novamente o método de integração por partes para o cálculo deste integral, com $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = x+2$, obtemos:

$$(\pi+2)^2 + 4 + 2\left[(x+2)\mathrm{sen}(x)\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \mathrm{sen}(x)dx = (\pi+2)^2 + 4 + 2\left((\pi+2)\times 0 - 2\times 0\right) -$$
$$2\left[-\cos(x)\right]_0^\pi = (\pi+2)^2 + 4 - 2\left(-(-1)+1\right) = (\pi+2)^2 + 4 - 4 = (\pi+2)^2$$

8. (a) Tal como é sugerido vamos recorrer ao método de substituição para determinar a família de primitivas de $\sqrt{(a^2-x^2)}$. Considerando $a > 0$ constante e fazendo a substituição $x = a\cos(t) = \varphi(t)$ temos $\varphi'(t) = -a\,\mathrm{sen}(t)$. Procedendo à substituição obtém-se

$$\int \sqrt{(a^2-x^2)}dx = \int \sqrt{(a^2 - a^2\cos^2(t))}(-a\mathrm{sen}(t))dt = \int \sqrt{a^2(1-\cos^2(t))}(-a\mathrm{sen}(t))dt =$$
$$\int a\sqrt{(\mathrm{sen}^2(t))}(-a\,\mathrm{sen}(t))dt = -a^2\int \mathrm{sen}^2(t)dt$$

Para que o cálculo desta primitiva seja imediato, recorde-se que $\mathrm{sen}^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

Então

$$-a^2\int \mathrm{sen}^2(t)dt = -a^2\frac{1}{2}\int 1-\cos(2t)dt = \frac{-a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t)\right) + C_t,\ \text{com } C_t \in \mathbb{R}.$$

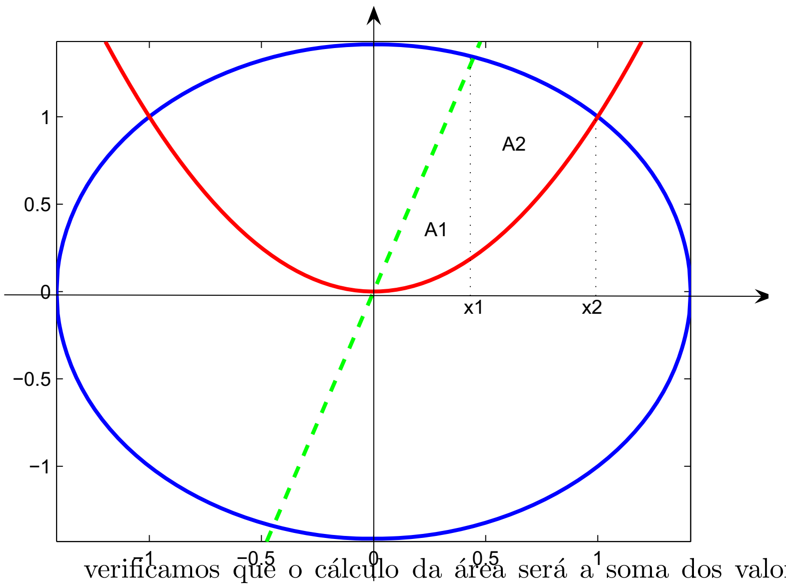
Da equação de substituição sabemos que $\dfrac{x}{a} = \cos(t)$, ou seja, $t = \mathrm{arcos}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ e atendendo a que

$$\mathrm{sen}(2t) = 2\mathrm{sen}(t)\cos(t) = 2\sqrt{1-\cos^2(t)}\cos(t) = 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\frac{x}{a} = 2\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\,\frac{x}{a},$$

podemos desfazer a substituição na primitiva calculada, obtendo-se

$$\frac{-a^2}{2}\left(\text{arcos}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2}\,2\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\,\frac{x}{a}\right)+C_x=\frac{-a^2}{2}\text{arcos}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C_x$$

(b) Atendendo ao gráfico das funções



verificamos que o cálculo da área será a soma dos valores de área A_1 e A_2. Para isso necessitamos de determinar os pontos de intersecção entre a recta $y = 3x$ e a circunferência (ponto de abcissa x1) e entre a parábola e a circunferência (ponto de abcissa x2).

Ponto de abcissa x1:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow x^2+(3x)^2=2 \Leftrightarrow 10x^2=2 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{5} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5},$$

e como x1 está no 1º quadrante, x1$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ponto de abcissa x2:

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ y=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+(x^2)^2=2 \Leftrightarrow x^4+x^2-2=0$, fazendo uma mudança de variável $z = x^2$ obtém-se uma equação de 2º grau, $z^2+z-2=0$, cujas soluções são $z = 1 \vee z = -2$. Desfazendo a mudança de variável, apenas a solução $z = 1$ é possível, o que conduz às soluções $x = 1 \vee x = -1$. Consequentemente x2=1, por ser um ponto do 1º quadrante.

Da equação da circunferência $x^2+y^2=2$, retiramos a expressão analítica da circunferência no 1º quadrante, $y^2=2-x^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2-x^2} \Rightarrow y=\sqrt{2-x^2}$

Área$= A_1+A_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{5}}{5}}(3x-x^2)dx+\int_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{1}(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$

Para o cálculo do 2º integral vamos utilizar o resultado da alínea anterior, obtendo-se

$$\left[3\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{5}}{5}}+\left[-\frac{(\sqrt{2})^2}{2}\text{arcos}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{5}}{5}}^{1}=\left[3\frac{\frac{5}{25}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{75}\right]+$$
$$\left[-\text{arcos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\text{arcos}\left(\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{5}}{10}\sqrt{2-\frac{5}{25}}+\frac{\sqrt{5}}{75}\right]=\frac{3}{10}-\frac{\sqrt{5}}{75}-\frac{\pi}{4}+$$
$$\frac{1}{6}+\text{arcos}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)-\frac{\sqrt{5}}{10}\frac{\sqrt{45}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{75}=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}+\text{arcos}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

9. A função integranda $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x}(x+5)}$ tem domínio $D_f=\mathbb{R}^+$, pelo que está definida $\forall\, x\in[1,+\infty[$. Estamos perante um integral impróprio de 1ª espécie.
Como $f(x)>0$, $\forall\, x\in[1,+\infty[$, podemos aplicar os critérios de convergência para estudar este integral. Compare-se com o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ que sabemos ser um integral divergente.
Para tal, determine-se

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+3}{\sqrt{x}(x+5)}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)}{(x+5)}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}}=1\in\mathbb{R}^+,$$ pelo que podemos concluir que os integrais são da mesma natureza, ou seja, o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x}(x+5)}$ é divergente.