FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (B e C)

Exame de Recurso — 10 de Fevereiro de 2010

1. (*1 val.*) Considere o conjunto $A = [0,1] \cup \left\{ \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto A. Averigúe se o conjunto A é aberto e/ou fechado. Justifique.

2. (*2 val.*)

   (a) Mostre, usando o Princípio de Indução Matemática, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{n^2+n}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Utilize a alínea anterior para determinar o limite da sucessão $u_n = \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2}}$.

3. (*2 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

   (a) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+3} + \operatorname{sen}(n)}{2 + n\sqrt[3]{n+3}}$;

   (b) $b_n = \left(\dfrac{2^n - 1}{2^n + 4} \right)^n$.

4. (*4 val.*) Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \log^2(|x|), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade de f.

   (b) Estude a diferenciabilidade e os extremos relativos de f.

   (c) Determine os sentidos de concavidade de f e os seus pontos de inflexão.

5. (*2 val.*) Considere a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = x + \operatorname{sen}(x) - 1.$$

   (a) Mostre que a equação $x + \operatorname{sen}(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz real no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

   (b) Prove que a raiz, cuja existência foi garantida na alínea anterior, é única no intervalo considerado.

V. S. F. F.

6. (*3 val.*) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log(1 + x^2)$.

   (a) Determine um desenvolvimento em Taylor, com resto de ordem cinco, para g em torno do ponto zero.

   (b) Calcule, justificando, o valor do limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2) - x^2}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}.$$

7. (*1,5 val.*) Calcule o integral $\displaystyle\int_0^{\pi} (x + 2)^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$.

8. (*3 val.*)

   (a) Recorrendo à substituição $x = a\cos t$, mostre que a família de primitivas da função $\sqrt{a^2 - x^2}$ é dada por

$$-\frac{a^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c, \text{ com } c \text{ uma constante real.}$$

   (b) Considere o domínio plano do primeiro quadrante, $\mathcal{D}$, interior à circunferência $x^2 + y^2 = 2$, compreendido entre as linhas de equações $y = 3x$ e $y = x^2$. Calcule a área do domínio $\mathcal{D}$ (se necessário, utilize a alínea anterior).

9. (*1,5 val.*) Usando os critérios de convergência, estude a natureza (ou convergência) do integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{x}\,(x + 5)}\, dx.$$