Análise Matemática I E

Resolução Exame de Época Normal

1. $X = ([-1,1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{2\}$

   (a) $int(X) = \emptyset$, $fr(X) = [-1,1] \cup \{2\}$
   $\overline{X} = X \cup fr(X) = [-1,1] \cup \{2\}$.

   (b) X não é fechado porque $X \neq \overline{X}$.
   A fronteira de um conjunto é sempre um conjunto fechado, logo $fr(X)$ é um conjunto fechado.

   (c) $\inf(X) = \min(X) = -1$
   $\sup(X) = \max(X) = 2$

2. (a) $0 < \dfrac{\sqrt[3]{8n^2-1}}{n\sqrt{n+\sin(n)}} < \dfrac{2n^{2/3}}{n} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{n}} \to 0$
   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (b) $b_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \left(\dfrac{n+1-2}{n+1}\right)^{2n} = \left(\left(1+\dfrac{-2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^2 \left(1+\dfrac{-2}{n+1}\right)^{-2}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = (e^{-2})^2 = e^{-4}$.

   (c) $c_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 1$, porque $\frac{1}{n} \to 0$.

3. $x_0 = 0\,,\quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}\,.$

   (a) $x_0 = 0$ verifica a condição.
   $0 \le x_n \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{x_n}{3} \le \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} \le \frac{x_n}{3} + 2/3 \le 1 \Rightarrow 0 \le x_{n+1} \le 1.$
   O que prova a hereditariedade da propriedade, concluindo a prova por indução.

   (b) $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{3} + \frac{2}{3} - x_n = -\frac{2}{3x_n} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(1-x_n) \ge 0$, logo x_n é crescente.
   $(x_n \le 1 \Rightarrow 1 - x_n \ge 0)$.

   (c) x_n é monótona e limitada logo convergente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$.
   Da igualdade $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}$, resulta $L = \frac{L}{3} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow L = 1$.

4. $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}e^t dt$.

   (a) Pelo teorema fundamental do Cálculo tem-se $F'(x) = \frac{e^x}{x^2}$.
   $F'(x) > 0$, logo F é estritamente crescente no seu domínio.

   (b) Recta tangente a F no ponto $(1, F(1))$:
   $y - F(1) = m(x-1)$, onde $m = F'(1) = e$. Substituindo a equação da recta tangente será $y = ex - e$.

   (c) $F''(x) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3} = \frac{e^x}{x^2}\left(1 - \frac{2}{x}\right)$.
   F tem um ponto de inflexão em $x = 2$.
   $F''(x) > 0$ se $x > 2$, $F''(x) < 0$ se $0 < x < 2$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} =$
$= \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \dfrac{1}{2}$

6. O desenvolvimento de Taylor para a função $\sin(x)$ é dado por

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(c),$$

com $c \in]0, x[$. Fazendo $x = 0.1$ resulta

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{\cos(c)}{6000},$$

com $c \in]0, 0.1[$. Finalmente usando $0 < cos(c) < 1$ válido para $c \in]0, 1[$ resulta que

$$0 < 0,1 - \sin(0.1) < \frac{1}{6000}.$$

7. (a) $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$.
Fazendo a substituição $u = t+1$, teremos $u'(t) = 1$.
$\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}}dt = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int u^{1/2} - u^{-1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2} = \frac{3(t+1)^{3/2}}{2} - \frac{2}{\sqrt{t+1}} + C$

(b) Vamos fazer a substituição $t = \tan(x)$.
$x = \arctan(t)$ logo $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$.
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \tan^2(x) + 1 = 1/\cos^2(x) \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin^2(x) + \tan(x)}dx = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{t^3+2t^2+t}dt$. Para concluir o exercício basta determinar os valores de A, B e C que verificam a igualdade

$$\frac{1}{t^3+2t^2+t} = \frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2},$$

e determinar o valor dos integrais obtidos.

8. $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt = \left[\arctan(t)^2/2\right]_0^x = \frac{\arctan(x)^2}{2}$.
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt = \frac{\arctan(x)^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}$

9. Sabemos que f diferenciável e que $f(2) = 1$, $f(4) = -1$, $g(x) = xf(x)$.

(a) Pelo teorema de Bolzano existe $a \in]2, 4[$ tal que $f(a) = 0$.
Temos que $g(0) = 0$, $g(a) = 0$, e sabemos que g é uma função diferenciável (produto de funções diferenciáveis). O teorema de Rolle garante a existência de um zero da derivada de g no intervalo $]0, a[$.

(b) Sabemos que $g(0) = 0$ e $g(2) = 2$. Aplicando o teorema de Lagrange à funcao g no intervalo $[0, 2]$, podemos concluir que existe $c \in]0, 2[$ tal que

$$\frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = 1 = g'(c).$$