FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I E

Exame de Época Normal — 27 de Janeiro de 2010

1. (*2 val.*) Considere o conjunto
$$X = ([-1,1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{2\}.$$
   (a) Explicite o interior, a fronteira e a aderência de X.
   (b) O conjunto X é fechado? O conjunto $fr(X)$ é fechado? Justifique a sua resposta.
   (c) Indique, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de X. Justifique.

2. (*2 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:
   (a) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{8n^2-1}}{n\sqrt{n+\sin(n)}}$,
   (b) $b_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$,
   (c) $c_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. (*2 val.*) Considere a sucessão definida por recorrência
$$x_0 = 0\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}\,.$$
   (a) Mostre, usando o Princípio de Indução Matemática, que $0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Mostre que a sucessão (x_n) é crescente.
   (c) Indique, justificando, o limite de (x_n).

4. (*3,5 val.*) Considere a função F definida no intervalo $]0, +\infty[$ por
$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} e^t dt.$$
   (a) Explicite a derivada de F e mostre que F é crescente.
   (b) Calcule a equação da recta tangente ao gráfico de F no ponto $(1, F(1))$.
   (c) Investigue a existência de pontos de inflexão de F.

V. S. F. F.

5. (*1,5 val.*) Calcule, justificando, o seguinte limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\,.$$

6. (*2,5 val.*) Utilizando a fórmula de Taylor, com resto de Lagrange de ordem 2, para a função seno, mostre que

$$0 < 0,1 - \sin(0,1) < \frac{1}{6000}\,.$$

7. (*2,5 val.*)

   (a) Calcule uma primitiva da função $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin^2(x)+\tan(x)}dx.$
   Sugestão: Use a mudança de variável $t = \tan(x)$ (mostre que $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$).

8. (*2 val.*) Calcule:

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\,dt.$$

   Sugestão: Comece por calcular o integral.

9. (*2 val.*) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(2) = 1$ e $f(4) = -1$ e $g(x) = xf(x)$.

   (a) Mostre que existe $x_0 > 0$ tal que $g'(x_0) = 0$.

   (b) Mostre que existe $c \in]0;2[$ tal que $g'(c) = 1$.