FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Análise Matemática I (D e E)

Exame de Recurso — 10 de Fevereiro de 2010

1. (*2 val.*) Considere o conjunto $X = \mathbb{Q} \cap]0;1[$.

   (a) Explicite int(X) e ext(X).

   (b) Exiba uma sucessão convergente (u_n) de pontos de X tal que $\lim u_n \notin X$. O conjunto X é fechado? Justifique, sem recorrer ao cálculo da fronteira ou da aderência de X.

2. (*2 val.*) Calcule, justificando, os limites das seguintes sucessões:

   (a) $a_n = \dfrac{e^{-n} + 2n}{e^{-n} - n}$,

   (b) $b_n = \ln(2n+1) - \ln(n)$,

   (c) $c_n = \sqrt[n]{(2n)!}$.

3. (*1,5 val.*) Considere a função real de variável real definida por $\varphi(x) = x^2\, e^x$. Prove, por indução, que a derivada de ordem n de φ é da forma $\varphi^{(n)}(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$.

4. (*2,5 val.*) Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 3}$.

   (a) Mostre por definição que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

   (b) Mostre que existe uma solução positiva da equação $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

5. (*2,5 val.*) Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre, por definição, que g é diferenciável em 0.

   (b) Utilizando as regras de derivação do produto e da função composta, determine explicitamente $g'(x)$.

6. (*2,5 val.*) Determine os intervalos de monotonia, os extremos e o contradomínio da função definida em $\mathbb{R}$ por

$$h(x) = \arctan(1 + x^2)\,.$$

V. S. F. F.

7. (*2,5 val.*)

   (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 4, em torno do ponto 0, da função $\ln(1+2x^2)$ (sugestão: determine inicialmente o polinómio de Taylor de ordem 2, em torno do ponto 0, da função $\ln(1+y)$.)

   (b) Calcule, justificando, o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)-2x^2}{x^4}.$$

8. (*1,5 val.*) Recorrendo à substituição $x=\tan(t)$, calcule uma primitiva da função $\phi(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

9. (*3 val.*) Considere os integrais

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)} \quad \text{e} \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4(x)}.$$

   (a) Calcule I.

   (b) Seja f a função definida no intervalo $[0;\frac{\pi}{4}]$ por $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$. Mostre que

$$f'(x)=\frac{3}{\cos^4(x)}-\frac{2}{\cos^2(x)}.$$

   (c) Usando a alínea (b), estabeleça uma relação entre I e J. Deduza o valor de J.