Exercícios de Análise Matemática I

Topologia e Indução Matemática

1. Indique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são majorados, minorados ou limitados. Indique ainda, caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um desses conjuntos.

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| = 2|x|\}$;

   (b) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^{-1}}{x} < \frac{x}{x^{-1}}\right\}$;

   (c) $\left\{x \in \mathbb{R} : x = \sin\left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$;

   (d) $\{x \in \mathbb{R} : x = \log(n), n \in \mathbb{N}\}$.

2. Determine o interior, a fronteira e o derivado dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Indique quais são abertos e quais são fechados.

   (a) $[0, 2[\cup]3, 5[\cup\{6, 7\}$;

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq x\}$;

   (c) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$;

   (d) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \geq |x|\}$;

   (e) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$;

   (f) $\left\{x = \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\right\}$;

   (g) $\left\{x = m + \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$;

   (h) $(\{x = \cos(n\pi/3) \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Q}) \cup]-2, -1[$.

3. Quando possível, dê um exemplo de um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que:

   (a) seja finito e aberto;
   (b) seja fechado e não limitado;
   (c) seja igual ao seu derivado;
   (d) tenha por exterior um intervalo limitado;

(e) seja aberto e fechado.

Sempre que adequado, justifique a inexistência de um subconjunto com as características pedidas.

4. Sentados no Parnasso, Euclides e Zenão debatem. Afirma Euclides: “O intervalo $[0,1[$ não possui máximo, posto que o supremo deste intervalo é 1. Ora $1 \notin [0,1[$.” Rebate Zenão: “Como estais enganado, meu caro. Vede:

$$0,9999999999.....$$

pertence a $[0,1[$ e é maior que cada um dos elementos deste intervalo.” Quem fala verdade?

5. Considere o seguinte conjunto:

$$F = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 5x + 9 > 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x - 1 \leq 7\}.$$

(a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de F.
(b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de F.
(c) Indique, justificando, se F é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

6. Considere o seguinte conjunto:

$$H = \Big\{x \in \mathbb{Q} \,:\, x^2 < 9\Big\} \cup \Big\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \,:\, x^2 - 2x - 5 \leq 0\Big\}.$$

(a) Determine o interior, o exterior e a fronteira de H.
(b) Determine a aderência, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de H.
(c) Determine, se existirem, o conjunto dos majorantes, o supremo, o máximo, o conjunto dos minorantes, o ínfimo e o mínimo de H.

7. Prove por indução matemática as seguintes propriedades:

$\forall n \in \mathbb{N}$,

(a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n$;
(b) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$;
(c) $\sum_{k=1}^{n} k k! = (n+1)! - 1$;
(d) $n \geq 4 \Rightarrow n! > 2^n$;
(e) $\sum_{j=1}^{n} j^2 < (n+1)^3$;

(f) $(1+k)^n \geq 1+nk$ para $k \in [-1,+\infty[$;

(g) $9^n - 1$ é múltiplo de 8.

8. Considere a função definida em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pela expressão:

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

(a) Calcule $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$ e $f^{(3)}(x)$.

(b) Conjecture a fórmula para a n-ésima derivada $f^{(n)}(x)$ da função f. Certifique-se da sua correção fazendo a respectiva prova utilizando indução matemática.

Exercícios de Análise Matemática I

Sucessões

9. De entre as seguintes sucessões, definidas pelo seu termo geral, indique quais são majoradas, minoradas ou limitadas:

   (a) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$; (b) $b_n = (-1)^n n^2$;

   (c) $c_n = n^{(-1)^n}$; (d) $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

10. Considere a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recorrência

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}\,, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

   (a) Utilizando a indução matemática, mostre que $0 < u_n < 2\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Prove que a sucessão é monótona crescente.

11. Considere a sucessão

$$u_n = \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n}}\,.$$

   Indique, justificando, quais das seguintes sucessões são subsucessões de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

   (a) $\frac{1}{\sqrt{2n}}$;
   (b) $\frac{1}{\sqrt{n}}$;
   (c) $-\frac{1}{\sqrt{n}}$;
   (d) $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

12. Em cada uma das alíneas seguintes, indique uma ordem $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$ se verifique:

   (a) $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < 10^{-5}$;
   (b) $\left|\frac{e^n+2}{e^n} - 1\right| < 10^{-5}$;
   (c) $\left|\frac{1}{n^2+n}\right| < 10^{-5}$;
   (d) $e^{n^2} > 10^5$.

13. Utilizando a definição de convergência de uma sucessão, prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n+2}{e^n} = 1\,, \qquad \lim_{n\to\infty} e^{n^2} = +\infty\,.$$

Indique o valor do limite da sucessão $u_n = \dfrac{-n^2-n+1}{n^2+n}$. Utilizando a definição de sucessão convergente, prove a sua validade.

14. Determine, se existirem, os limites das sucessões de termo geral:

$$a_n = \frac{2n+3}{3n-1}; \qquad b_n = \frac{n^2-1}{n^4+3};$$

$$c_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}; \qquad d_n = \cos(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}; \qquad f_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2};$$

$$g_n = \sqrt{(n+1)!-n!}; \qquad h_n = \frac{\sqrt[3]{n^2+1}(\sqrt{n}+1)}{3n\sqrt[6]{n+1}};$$

$$i_n = \frac{\sqrt{n^2+5}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[n]{2n^3+n^2+\frac{n}{2}}}; \qquad j_n = \sqrt[2n]{n};$$

$$k_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}; \qquad l_n = \sqrt{n^2+5n}-n;$$

$$m_n = \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{2n}; \qquad \overline{m}_n = \left(\frac{2n+1}{4n+4}\right)^{3n};$$

$$o_n = 2^{2n+1}\left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^n; \qquad p_n = n\sqrt[n]{\frac{1}{2^{3n}n!}};$$

$$q_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}; \qquad r_n = \sqrt{n}\sin\sqrt{\frac{1}{n}};$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}; \qquad t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^2 n}{5n^3+k}.$$

15. Indique, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras:

    (a) Se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem máximo, a sucessão é divergente.

    (b) Se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem supremo, a sucessão é divergente.

    (c) Se para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $u_n > 0$ e se $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ então a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente a partir de uma certa ordem.

16. Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto dos sublimites seja:

$$\text{(a)}\,\{3,4\}\,; \qquad \text{(b)}\ \mathbb{N}; \qquad \text{(c)orajosos:}\,\mathbb{R}\,.$$

17. Considere a sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

    (a) Num referencial ortonormado represente as rectas Δ e D, de equações $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = x$, respectivamente.
    Represente no eixo das abcissas os termos u_1, u_2, u_3 e u_4 da sucessão. O que pode conjecturar?

    (b) Prove que a sucessão de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e majorada por $M = 4$.

    (c) Determine h tal que a sucessão de termo geral $v_n = u_n + h$ seja geométrica. Deduza o valor de

$$l = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

    (d) Calcule o valor de l por um método distinto do utilizado na alínea anterior.

18. Considere as sucessões de números reais definidas por

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{6}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e

$$v_n = 5u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Mostre que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica.
(b) Deduza a expressão analítica de $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) Calcule o limite de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

19. Considere a sucessão de números reais positivos definida por recorrência por

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

(a) Utilizando a indução matemática, mostre que $4 < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Prove que a sucessão é convergente e determine o valor do seu limite.

20. Considere o conjunto $\mathcal{S}$ das sucessões reais que verificam a seguinte propriedade:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

(a) Dê o exemplo de duas sucessões geométricas $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\beta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que pertençam a $\mathcal{S}$.

(b) Dadas duas constantes reais λ e μ, mostre que a sucessão $\{\lambda\alpha^n + \mu\beta^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a $\mathcal{S}$.

(c) Determine o termo geral da sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pertencente a $\mathcal{S}$, tal que $u_1 = 2$ e $u_3 = 1$.

21. Considere os pontos do plano euclidiano $A_1 = (2, 0)$ e $A_2 = (0, 1)$. Considere a sucessão de pontos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ do plano euclidiano definida da seguinte forma:
A_3 é o ponto médio de A_1 e A_2;
A_4 é o ponto médio de A_2 e A_3;
...
$\forall n \geq 2,\ A_{n+1}$ é o ponto médio de A_n e A_{n-1}.

Inspirando-se no exercício 20., calcule explicitamente as coordenadas do ponto A_n. Para que ponto tende no plano a sucessão $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

22. Considere a sucessão L_n correspondendo ao número máximo de regiões do plano euclideano que conseguimos delimitar com n rectas.

(a) Verifique que $L_0 = 1$, $L_1 = 2$, $L_2 = 4$ e $L_3 = 7$.

(b) Observe que L_n é dado pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + n \end{cases} .$$

(c) Conclua que

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1\,.$$

Exercícios de Análise Matemática I

Limites e Continuidade

23. Considere $f(x) = 2\sqrt{|x|}\cos(3x)$. Determine $\epsilon > 0$ tal que, para $x \in]-\epsilon, \epsilon[$,
$$|f(x)| < \frac{1}{50}\,.$$

24. Prove, recorrendo à definição de limite segundo Cauchy, que:
    (a) $\lim\limits_{x\to 1} 3x + 2 = 5\,;$
    (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x+1} = 2.$

25. Justifique que não existem os seguintes limites (utilize a definição de limite recorrendo a sucessões – definição segundo Heine):
    (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x);$
    (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^6}}{\sin(x^3)};$
    (c) $\lim\limits_{x\to 1} \lfloor x\rfloor e^x;$
    ($\lfloor x\rfloor$, ou "parte inteira de x", designa o maior inteiro menor ou igual a x)
    (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1}\sin(x);$
    (e) $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \cos\left(\dfrac{2}{\pi x}\right).$

26. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} x+2\,, & \text{se } x > 1 \\ 2-3x\,, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}.$$
    (a) Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
    (b) Defina uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, tal que $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x) = 4$.

27. Fixando um número real m, a expressão seguinte define uma função real de variável real em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$:
$$h(x) = \begin{cases} mx^2 + m + 4\,, & \text{se } x > 0 \\ |x-3| + m^2\,, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(a) Determine m de modo a que exista $\lim_{x\to 0} h(x)$.

(b) Para os valores de m determinados na alínea anterior, estude a injectividade de h.

28. Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{a + tb}{1 + t}\,.$$

(a) Justifique que $f(t) = \beta + \dfrac{\alpha}{1+t}$, para constantes α e β apropriadas.

(b) Mostre que f é estritamente crescente e determine o seu contradomínio.

(c) Esboce o gráfico de f.

29. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + e^x}\,.$$

(a) Mostre que f é ímpar.

(b) Sem recorrer ao cálculo de qualquer derivada, prove que f é crescente. Determine o seu contradomínio.

30. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor\,.$$

(a) Esboce o gráfico de f.

(b) Estude a existência de máximo, mínimo, supremo e infímo de f.

(c) Justifique que f é periódica de período 1.

(d) Identifique o conjunto dos pontos em que f não tem limite.

31. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^x + 2^x}{2 - e^x}\,, & \text{se } x \geq 0 \\ \arctan(x)\,, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(a) Determine o domínio de f. Estude a continuidade de f.

(b) Calcule os limites de f em $+\infty$ e em $-\infty$.

(c) Estude a existência de máximo ou mínimo da função f no intervalo $[-1, 1]$. Poderíamos aplicar o Teorema de Weierstrass neste mesmo contexto?

32. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua.

    (a) Prove a existência de um ponto fixo de f, i.e., a existência de $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

    (b) Adicionalmente, suponha que existe uma constante $k \in [0, 1[$ tal que
    $$\forall\, x, y \in [a, b]\,, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\,.$$
    Neste caso, f designa-se por uma contracção. Justifique que o ponto fixo determinado na alínea anterior é único.

33. Determine, justificando, o domínio e os pontos de continuidade das funções definidas pelas seguintes expressões. Sempre que possível, prolonge as funções por continuidade aos pontos aderentes ao domínio.

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^3+1} \qquad\qquad f_2(x) = \cos(1/\sqrt{1-x^2})$$

$$f_3(x) = \frac{x+1}{x^3-3x+2} \qquad\qquad f_4(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{\lfloor x+1 \rfloor}$$

34. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right), & \text{se } x < 1 \\[2ex] e^x - \log(x^2)\,, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

    (a) Determine os pontos do domínio D_f em que f é contínua. Considerando a aderência de D_f, indique um seu subconjunto ao qual a função possa ser prolongada por continuidade.

    (b) Averigúe a existência de assímptotas verticais ou horizontais ao gráfico de f.

    (c) Será f diferenciável em $x = 1$?

35. Responda às questões do exercício anterior considerando agora a função $g(x) = f(x)|x-1|^{\frac{3}{2}}$.

36. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, injectiva e tal que $f(a) < f(b)$. Utilize o teorema do valor intermédio de Bolzano para concluir que f é estritamente crescente no seu domínio.
Sugestão: Comece por mostrar, utilizando o método de redução ao absurdo, que não existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) < f(a)$ ou $f(x) > f(b)$.

37. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ que verifica as seguintes condições:
i) $f(x) \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Recorrendo à definição de limite, justifique que:

    (a) c é um número inteiro.

    (b) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, sempre que $x > a$.

Exercícios de Análise Matemática I

Diferenciabilidade

38. Determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, sendo:

    (a) $f(x) = 5x - x^2$ e $a = 4$;

    (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $a = -2$.

    Faça um esboço dos gráficos das funções e das tangentes determinadas.

39. Determine os pontos onde a tangente ao gráfico de:

    (a) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ é horizontal;

    (b) $f(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x)$ é horizontal;

    (c) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)$ é paralela à recta $y = \frac{1}{3}x + 3$.

40. Determine, caso existam, os valores de c para os quais a tangente ao gráfico de
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$
no ponto $(c, f(c))$ é paralela à recta que passa pelos pontos $(1, f(1))$ e $(3, f(3))$.

41. Considere a função polinomial
$$e(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$
Determine a equação da recta tangente ao gráfico de e no ponto de abcissa zero. Averigúe a possibilidade da existência de rectas tangentes ao gráfico de e com declive nulo.

42. Exercício análogo ao anterior, considerando agora a função
$$s(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

43. Considere a função $f(x) = x|x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Estude a diferenciabilidade de f indicando o domínio e a expressão da função derivada.
Resolva a mesma questão, considerando agora a função $g(x) = |x^2 - x|$.

44. Considere a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{x}{2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

(b) Mostre que f é diferenciável e que $f'(0) = 1/2$.

(c) Existe alguma vizinhança do ponto 0 onde f seja monótona crescente?

(d) Verifique se f' é contínua no ponto 0.

45. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{se } x < 0 \\ ax + b, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

é diferenciável no ponto 0 qualquer que seja o valor de $a \in \mathbb{R}$ desde que b seja igual a 1.

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}$, também o é a função

$$g(x) = \log(2 + \sin(f(x))) \,.$$

46. Calcule a derivada das seguintes funções, sem se preocupar com os conjuntos em que estão definidas e em que são diferenciáveis.

(a) $f_1(x) = (x^2+1)^{2007}$;

(b) $f_2(x) = \tan(x) e^{(x^3+1)^5}$;

(c) $f_3(x) = \dfrac{\arctan(x^{\frac{1}{3}})}{\log(x)}$;

(d) $f_4(x) = \log(\log(x))$;

(e) $f_5(x) = \sin(2^x)\arccos(\log(x))$;

(f) $f_6(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$;

(g) $f_7(x) = x^x \log\left(\frac{2}{x}\right)$;

(h) $f_8(x) = \frac{\sin(\cos(x))}{\sin(x)}$;

(i) $f_9(x) = \cosh^2(3x+2) - \sinh^2(3x+2)$;

(j) $f_{10}(x) = x^2 \log_2(\sqrt{\cos(x)\arccos(x^2+e^x)})$;

(k) $f_{11}(x) = \sin(\sqrt{\log(\tan(e^{(x+3)^2}))})$;

(l) $f_{12}(x) = \sin(x)|\sin(x)|$.

47. Determine a expressão geral para a derivada de ordem n das seguintes funções:

(a) $\sin(2x)$ (b) xe^x (c) $x\log(x+1)$.

48. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

(a) Indique os intervalos de monotonia de f.

(b) Determine um intervalo fechado no qual os extremos absolutos da restrição de f são atingidos no interior do intervalo.

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

49. Analise o comportamento das seguintes funções, indicando o seu domínio de definição, os pontos de continuidade e os pontos onde é possível prolongar a função por continuidade, os pontos de diferenciabilidade as assímptotas horizontais e verticais (caso existam), os intervalos de monotonia, os pontos estacionários e os extremos relativos, o sentido das concavidades e os pontos de inflexão, o contradomínio e os extremos absolutos.

(a) $g_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

(b) $g_2(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$;

(c) $g_3(x) = x\log(x)$;

(d) $g_4(x) = \log(1+x^2) - \arctan(x)$;

(e) $g_5(x) = e^{-x^2}$;

(f) $g_6(x) = x\tan(x)$ (considere a função restrita ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$) .

50. Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,x^2 - 4\,x + 5}{(x-1)^2}, & \text{se } x < 2 \\ x+3, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Determine o domínio de f;
(b) Estude f quanto à continuidade;
(c) Estude f quanto à derivabilidade;
(d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f;
(e) Determine os pontos de inflexão e as concavidades de f.

51. Considere a função polinomial $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$. Determine uma condição sobre a e b que implique o crescimento estrito de p.

52. (a) Mostre que, de entre todos os rectângulos de área 1, o quadrado é aquele que tem o menor perímetro.
(b) Mostre que, de entre todos os rectângulos inscritos no círculo trigonométrico, o quadrado é aquele que tem maior área.

53. Pretende-se construir um depósito de forma cilíndrica com volume unitário, sem tampa, de modo a minimizar a sua superfície exterior. Determine as dimensões do depósito, isto é, o valor do raio da base r e da altura h.

54. Considere a função

$$p(t) = \frac{1}{1+2e^{-t}}, \qquad t \in [0, +\infty[.$$

(a) Verifique que p é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que satisfaz a relação

$$p'(t) = p(t)(1 - p(t))\,.$$

(b) Admitindo que $p(t)$ modela (percentualmente) o número de indivíduos de uma população como função do tempo, interprete o valor de $p'(t)$. Identifique o instante t_N em que ocorre o maior número de nascimentos.

55. Prove que a equação $x^3 + 3x - 1 = 0$ tem uma única solução α em $\mathbb{R}$ e que $\alpha \in]0, 1[$.

56. Mostre que a equação
$$3^x + 4^x = 5^x$$
admite exactamente uma solução real.

57. Seja f uma função duas vezes diferenciável tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$. Mostre a existência de $x_0 \in]0, 2[$ tal que $f''(x_0) = 0$.

58. (a) Justifique, utilizando o Teorema de Rolle, a existência de dois pontos estacionários para a função $\sin(x)$ no intervalo $]0, 2\pi]$.

    (b) Considere uma função f, diferenciável em $\mathbb{R}$, periódica de período T. Justifique a existência de pelo menos dois pontos estacionários no intervalo $]0, T]$.

59. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Verifique que f está nas condições do Teorema de Lagrange e determine o valor intermédio c nele referido.

60. Suponha f contínua em $V_\epsilon :=]a - \epsilon, a + \epsilon[$ e diferenciável em $V_\epsilon \backslash \{a\}$. Suponha ainda que existe o seguinte limite
$$\lim_{x \to a} f'(x) = L\,.$$
Justifique, utilizando o Teorema de Lagrange, que f é diferenciável em a, sendo
$$f'(a) = L\,.$$

61. Para cada uma das seguintes funções, estude a continuidade, determine as derivadas laterais da função no ponto c indicado e verifique se a função é diferenciável em c. Interprete geometricamente os resultados obtidos.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x^3 + 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e $c = 1$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \leq -1 \\ (x+1)^2, & \text{se } x > -1 \end{cases}$ e $c = -1$.

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$ e $c = 2$.

62. Considere a seguinte função definida por ramos

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(2x) + x, & \text{se } x < 0 \\ \tan(2x) + \log(1 + x), & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

Estude a diferenciabilidade de f em zero. (Sugestão: utilize o resultado do exercício 60.)

63. Mostre que, para todo o $x > 0$:

(a) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$;

(b) $\dfrac{x}{1+x} < \log(1 + x) < x$;

(c) $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen}(x) < x$;

(d) $e^x > 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dots + \dfrac{1}{n!}x^n$ (Sugestão: utilize o Princípio de Indução Matemática).

64. Justifique as afirmações verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas.

(a) Toda a função contínua é limitada.

(b) Se f é diferenciável então é contínua.

(c) Se f e g são crescentes, então $f + g$ e $f - g$ são crescentes.

(d) Se f e g são crescentes, então fg e f/g (onde g não se anula) são crescentes.

(e) Se f e g têm concavidade voltada para cima, então $f + g$ e fg têm concavidade voltada para cima.

(f) Se f tem um extremo absoluto no ponto a então f^2 também.

(g) Se f crescente, então f^2 é crescente.

(h) Se f tem um extremo local num ponto a, então $f'(a) = 0$.

(i) Se $f'(a) = 0$, então f tem um extremo local no ponto a.

Exercícios de Análise Matemática I

Regra de Cauchy e Fórmula de Taylor

65. Calcule os seguintes limites por um método à sua escolha (regra de Cauchy, expansão de Taylor ou reconhecendo a definição de uma derivada).

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{x}$

    (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(x+e^x)}{x}$

    (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$

    (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+2x^2)}{x^2}$

    (e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

    (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x}$

    (g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\log(x)}\right)$

    (h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\log(x)}$

    (i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^{1/x}$

    (j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$

66. Verifique que não é possível calcular o seguinte limite através da regra de Cauchy, e determine-o directamente:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}.$$

67. Qual o erro cometido no cálculo do seguinte limite, onde foi usada sucessivamente a regra de Cauchy?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

68. Determine um polinómio $P(x)$ de grau 2 tal que $P(1) = 3$, $P'(1) = -2$ e $P''(1) = 4$.

69. Desenvolva o polinómio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ em potências inteiras de $x - 2$.

70. Escreva a fórmula de MacLaurin, com resto de ordem 3, para as seguintes funções
$$f(x) = xe^x\,, \quad g(x) = \ln(\cos(x))\,.$$

71. Escreva a fórmula de Taylor, para as seguintes funções:

    (a) $f(x) = \log(1 + x^2)$, com potências de x e resto de ordem 3;

    (b) $f(x) = \cos(x)$, com potências de $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ e resto de ordem 2;

    (c) $f(x) = x\sin(2x)$, com resto de ordem 2, no ponto $x_0 = 0$;

    (d) $f(x) = \frac{e^x \sinh(x)}{1+x^2}$, com resto de ordem 3, no ponto $x_0 = 0$;

    (e) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$, com resto de ordem 4, no ponto $x_0 = 0$;

    (f) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, com resto de ordem 5, no ponto $x_0 = 1$.

    Esboce o gráfico de cada uma destas funções numa vizinhança do ponto considerado, prestando particular atenção à sua posição relativamente à recta tangente.

72. Calcule, usando a expansão de Taylor de ordem 3, valores aproximados de:

    (a) $\sqrt{98}$;

    (b) $2^{5.1}$;

    (c) $\mathrm{arctg}(1.05)$.

73. Com o auxílio da expansão de Taylor, calcule os seguintes limites e indique se são atingidos por valores superiores, inferiores ou nenhum dos casos anteriores.

    (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \frac{x^3}{6} - \operatorname{sen}(x)}{x^5}$

(c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$

74. Utilize a fórmula de Taylor para estabelecer as seguintes desigualdades:

(a) $\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

(b) $\frac{1}{1+\log(x)} < 1 - (x-1) + 3\,\frac{(x-1)^2}{2}$, $\forall x > 1$.